

光电工程

Opto-Electronic Engineering

中文核心期刊 中国科技核心期刊
Scopus CSCD

超拉普拉斯重叠组稀疏先验的稀疏角度CT重建

齐子文, 孔慧华, 李佳欣, 潘晋孝

引用本文:

齐子文, 孔慧华, 李佳欣, 等. 超拉普拉斯重叠组稀疏先验的稀疏角度CT重建[J]. 光电工程, 2023, 50(10): 230167.

Qi Z W, Kong H H, Li J X, et al. Overlapping group sparsity on hyper-Laplacian prior of sparse angle CT reconstruction[J]. *Opto-Electron Eng*, 2023, 50(10): 230167.

<https://doi.org/10.12086/oe.2023.230167>

收稿日期: 2023-07-10; 修改日期: 2023-09-19; 录用日期: 2023-09-20

相关论文

多通道联合的广义总变分能谱CT重建

连祥媛, 孔慧华, 潘晋孝, 高文波, 王攀

光电工程 2021, 48(9): 210211 doi: [10.12086/oe.2021.210211](https://doi.org/10.12086/oe.2021.210211)

混合梯度稀疏先验约束下的图像盲复原

徐宁珊, 王琛, 任国强, 黄永梅

光电工程 2021, 48(6): 210040 doi: [10.12086/oe.2021.210040](https://doi.org/10.12086/oe.2021.210040)

低秩先验的相位差法太阳图像重建

王帅, 鲍华, 何春元, 荣会钦, 李淑琪, 侯佳林, 饶长辉

光电工程 2023, 50(6): 220208 doi: [10.12086/oe.2023.220208](https://doi.org/10.12086/oe.2023.220208)

更多相关论文见光电期刊集群网站 



光电工程
Opto-Electronic Engineering

<http://cn.oeejournal.org/oe>



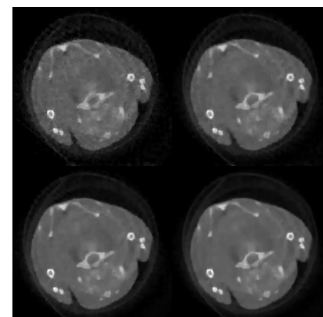
 OE_Journal



Website

DOI: 10.12086/oe.2023.230167

超拉普拉斯重叠组稀疏先验的 稀疏角度 CT 重建

齐子文^{1,2}, 孔慧华^{1,2*}, 李佳欣^{1,2}, 潘晋孝^{1,2}¹中北大学数学学院, 山西 太原 030051;²信息探测与处理山西省重点实验室, 山西 太原 030051

摘要: 对于稀疏角度下的投影数据, 计算机断层扫描在图像重建中容易出现伪影和噪声较多的问题, 难以满足工业及医学诊断要求。本文提出一种基于重叠组稀疏和超拉普拉斯先验的稀疏角度 CT 迭代图像重建算法。其中重叠组稀疏反映图像梯度稀疏性, 从图像梯度的角度考虑相邻元素之间互相重叠交叉的关系。而超拉普拉斯先验能够精确地近似图像梯度的重尾分布, 能够使得重建图像整体的质量提升。本文提出的算法模型采用交替方向乘子法, 主分量最小化法和梯度下降法求解目标函数。实验结果表明, 在稀疏角度 CT 重建的条件下, 本文提出的算法在保留结构细节、抑制图像重建过程中产生的噪声和阶梯伪影方面有着一定的改善。

关键词: CT 重建; 稀疏角度; 图像梯度; 重叠组稀疏; 超拉普拉斯先验

中图分类号: TP391.4

文献标志码: A

齐子文, 孔慧华, 李佳欣, 等. 超拉普拉斯重叠组稀疏先验的稀疏角度 CT 重建 [J]. 光电工程, 2023, 50(10): 230167

Qi Z W, Kong H H, Li J X, et al. Overlapping group sparsity on hyper-Laplacian prior of sparse angle CT reconstruction[J].

Opto-Electron Eng, 2023, 50(10): 230167

Overlapping group sparsity on hyper-Laplacian prior of sparse angle CT reconstruction

Qi Ziwen^{1,2}, Kong Huihua^{1,2*}, Li Jiaxin^{1,2}, Pan Jinxiao^{1,2}¹School of Mathematics, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China;²Shanxi Key Laboratory of Signal Capturing & Processing, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China

Abstract: For the sparse angle projection data, the problem of artifact and noise is easy to appear in the image reconstruction of computed tomography, which is difficult to meet the requirements of industrial and medical diagnosis. In this paper, a sparse angle CT iterative reconstruction algorithm based on overlapping group sparsity and hyper-Laplacian prior is proposed. The overlapping group sparsity reflects the sparsity of image gradient, and the overlapping cross relation between the adjacent elements is considered from the perspective of the image gradient. The hyper-Laplacian prior can accurately approximate the heavy-tailed distribution of the image gradient and improve the overall quality of the reconstructed image. The algorithm model proposed in this paper uses alternating direction multiplier method, principal component minimization method and gradient descent method to

收稿日期: 2023-07-10; 修回日期: 2023-09-19; 录用日期: 2023-09-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (62201520, 62103384, 62122070); 山西省基础研究计划项目 (202103021224190)

*通信作者: 孔慧华, huihuak@163.com。

版权所有©2023 中国科学院光电技术研究所

solve the objective function. The experimental results show that under the condition of the sparse angle CT reconstruction, the proposed algorithm has certain improvement in preserving structural details and suppressing noise and staircase artifacts generated in the process of image reconstruction.

Keywords: CT reconstruction; sparse angle; image gradient; overlapping group sparsity; hyper-Laplacian prior

1 引言

X 射线计算机断层扫描 (computed tomography, CT) 成像技术可以获取人体和物体的内部结构信息, 已广泛应用于工业无损检测、医学临床诊断等领域^[1]。然而, 在临床检查时额外的 X 射线辐射可能导致癌症和其他遗传病变^[2]。因此, 降低辐射剂量和重建高质量图像是目前的研究重点。降低 X 射线辐射量的方法主要分两方面: 第一种方法是减少每个投影中的 X 射线曝光, 第二种方法是减少投影采样数, 即稀疏投影^[3]。第一种方法会产生含有噪声的投影, 重建图像含有大量的噪声和伪影^[4]。第二种方法是应用稀疏角度 CT, 但由于投影数据的采样不足, 重建图像会产生严重的伪影^[5]。

一些传统的 CT 图像重建算法比如滤波反投影 (filtered back projection, FBP) 算法和联合代数重建 (simultaneous algebraic reconstruction technique, SART) 算法, 这两个基础算法无法对不完整的投影数据重建出高质量的图像。压缩感知 (Compressed sensing, CS) 理论的出现使得图像处理中的不适定问题可以有效地解决^[6]。基于 CS 的图像重建算法主要利用图像的先验知识, 特别是图像的稀疏性, 如全变分^[7]、字典学习^[8]、小波变换等^[9]。近年来, 全变分 (total variational, TV) 算法被广泛应用于不同场景下的 CT 重建, 该算法可以很好地平滑图像以达到去噪的目的^[10]。Sidky 等将 TV 最小化引入到不完全投影数据重建中, 提出了一种基于投影到凸集 (projections onto convex sets, POCS) 的高效迭代重建算法 TV-POCS^[11]。虽然 TV 正则项能够很好地恢复图像的边缘信息, 但是过渡的平滑图像会导致图像产生阶梯伪影。为了克服这一现象, Zhang 等将非零像素稀疏性和图像连续性假设两个正则项来代替 TV 正则项, 提出了一种基于大规模线性规划的稀疏角度层析重建算法^[12]。连祥媛等提出一种多通道联合的广义全变分 (Total Generalized Variational, TGV) 的能谱 CT 迭代重建算法, 利用通道之间的相关性来消除重建过程中产生的

噪声和阶梯伪影^[13]。Peng 等将组稀疏 (group sparse representation, GSR) 正则化引入稀疏角度 CT 重建, 利用图像中相似补丁构成的图像组来表示 GSR 的基本单元, 并且成功将其应用于稀疏角度 CT 重建中^[14]。Jon 等将重叠组稀疏 (overlapping group sparsity, OGS) 和超拉普拉斯先验 (hyper-Laplacian, HL) 相结合, 提出了一种基于重叠组稀疏超拉普拉斯先验 (overlapping group sparsity on hyper-Laplacian, OGS-HL) 的图像去噪算法^[15]。

本文将 OGS 正则项和 HL 正则项应用于稀疏角度 CT 图像重建。相比于传统的 TV 正则项, OGS 正则项改进图像梯度的稀疏性, 由于重叠组采用图像梯度的结构信息作为图像梯度稀疏性的度量标准, 因此该算法能够在恢复图像边缘的同时消除阶梯伪影, 基于 HL 先验可以很好地近似图像梯度的重尾分布, 对于重建图像细节的保留有着更好的效果。

2 理论推导

2.1 基于 TV 的稀疏角度 CT 重建算法

稀疏角度 CT 图像重建与传统 CT 图像重建的过程基本相同, 设稀疏角度 CT 重建中需要重建的图像为 $\mathbf{f}$, 从探测器上获得的投影数据为 $\mathbf{p}$, 数据采集的投影矩阵用 $\mathbf{A}$ 表示, 稀疏角度 CT 重建问题可表示为

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2. \quad (1)$$

在稀疏角度 CT 重建的情况下, 由于投影采样不足会使重建图像产生噪声和伪影。为了重建高质量图像, 使用 CS 理论将图像进行稀疏变换, 例如对重建图像进行离散梯度变换 (discrete gradient transform, DGT), 则任意图像 $\mathbf{f} = (\nabla f_{i,j})_{n \times n}$ 的 DGT 定义为

$$(\nabla f)_{i,j} = \sqrt{((\nabla_x f)_{i,j})^2 + ((\nabla_y f)_{i,j})^2}, \quad (2)$$

则对于任意图像 $\mathbf{f}$, 其 TV 表达式为

$$TV(\mathbf{f}) = \sum_{i,j} \sqrt{((\nabla_x f)_{i,j})^2 + ((\nabla_y f)_{i,j})^2}, \quad (3)$$

其中 ∇_x , ∇_y 分别表示水平方向和竖直方向上的梯度算子, 其表达式分别为

$$(\nabla_x f)_{i,j} = \begin{cases} f_{i+1,j} - f_{i,j} & \text{if } i < n \\ f_{1,j} - f_{n,j} & \text{if } i = n \end{cases}, \quad (4)$$

$$(\nabla_y f)_{i,j} = \begin{cases} f_{i,j+1} - f_{i,j} & \text{if } j < n \\ f_{i,1} - f_{i,n} & \text{if } j = n \end{cases}. \quad (5)$$

故基于 TV 正则项的稀疏角度 CT 重建模型为

$$\min_f \frac{\mu}{2} \|A\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \lambda \varphi_{\text{TV}}(\mathbf{f}), \quad (6)$$

其中: 第一项为数据保真项, A 为投影矩阵, $\mathbf{p}$ 为投影数据, μ 为保真项系数。第二项为 TV 正则项, λ 为正则项系数。

2.2 基于 OGS-TV 的稀疏角度 CT 重建算法

TV 正则项已被广泛应用, 其虽然能够保留图像的锐利边缘, 但是过渡的平滑图像会导致图像产生阶梯伪影。为了进一步提升图像的质量, 消除重建中产生的阶梯伪影, Liu 等将一维信号的 OGS 推广到二维图像中并成功应用于图像去噪^[16]。

为了描述图像梯度的结构稀疏性, 首先定义一个二维图像的像素组 $\tilde{\mathbf{d}}_{(i,j),K}$, 形式如

$$\tilde{\mathbf{d}}_{(i,j),K} = \begin{bmatrix} d_{i-m_1,j-m_1} & d_{i-m_1,j-m_1+1} & \cdots & d_{i-m_1,j+m_2} \\ d_{i-m_1+1,j-m_1} & d_{i-m_1+1,j-m_1+1} & \cdots & d_{i-m_1+1,j+m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i+m_2,j-m_1} & d_{i+m_2,j-m_1+1} & \cdots & d_{i+m_2,j+m_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad (7)$$

其中: $m_1 = \lfloor (K-1)/2 \rfloor$, $m_2 = \lfloor K/2 \rfloor$, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示的是取整函数, 保证图像中每个重叠组的大小都是 $K \times K$, 则二维图像的 OGS 正则项可表示为

$$\phi_{\text{OT}}(\mathbf{d}) = \sum_{i,j=1}^n \|\mathbf{d}_{(i,j),K}\|_2, \quad (8)$$

其中: $\mathbf{d}_{(i,j),K}$ 是矩阵 $\tilde{\mathbf{d}}_{(i,j),K}$ 中所有元素组成的列向量, 即: $\mathbf{d}_{(i,j),K} = \tilde{\mathbf{d}}_{(i,j),K}(:, \cdot)$ 。根据式 (8) 可知当 $K=1$ 时, 该正则项就转变为传统的 TV 正则项, 则 OGS-TV 正则项可定义为

$$\varphi_{\text{OT}}(\mathbf{f}) = \phi_{\text{OT}}(\nabla_x \mathbf{f}) + \phi_{\text{OT}}(\nabla_y \mathbf{f}). \quad (9)$$

由于 OGS 正则项考虑了每个像素点梯度的 $K \times K$ 方形领域内的信息, 是一个非局部的稀疏先验, 因此 OGS-TV 正则项不仅拥有和 TV 正则项一样的图像边缘保留能力, 还能克服 TV 重建中图像边缘产生的阶梯伪影。故基于 OGS-TV 的稀疏角度 CT 重建算法为

$$\min_f \frac{\mu}{2} \|A\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \lambda \varphi_{\text{OT}}(\mathbf{f}), \quad (10)$$

其中: 第一项为数据保真项, 第二项为 OGS-TV 正则项, λ 为正则项系数。

2.3 基于 OGS-HL 的稀疏角度 CT 重建算法

OGS-TV 虽然可以克服图像的阶梯伪影, 但它难以恢复图像中较为复杂的纹理和细节。为进一步扩展 OGS-TV, Kong 等强调图像的梯度服从重尾分布^[17], 并且超拉普拉斯算子先验将会使得重尾分布获得更好的近似, 提出的 HL 先验的模型为

$$p(\mathbf{f}) \propto \prod_{i,j=1}^n e^{-\|(\nabla f)_{i,j}\|_q^q}, \quad (11)$$

其中: $\|\cdot\|_q$ 表示拟范数 l_q , $0 < q < 1$ 。 q 为超拉普拉斯参数, 通常参数 q 的范围为 $0.5 \leq q \leq 1$ 。根据式 (11), $\|(\nabla f)_{i,j}\|_q^q = |(\nabla_x f)_{i,j}|^q + |(\nabla_y f)_{i,j}|^q$, 将 HL 先验代入 OGS 正则项得

$$\phi_{\text{OH}}(\mathbf{d}) = \sum_{i,j=1}^n \|\mathbf{d}_{(i,j),K}\|_2. \quad (12)$$

根据式 (12), 当超拉普拉斯参数 $q=1$ 时, 该正则项就转变为 OGS-TV 正则项。OGS-HL 的正则项可表示为

$$\varphi_{\text{OH}}(\mathbf{f}) = \phi_{\text{OH}}(\nabla_x \mathbf{f}) + \phi_{\text{OH}}(\nabla_y \mathbf{f}), \quad (13)$$

故基于 OGS-HL 的稀疏角度 CT 重建算法, 算法模型为

$$\min_f \frac{\mu}{2} \|A\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \lambda \varphi_{\text{OH}}(\mathbf{f}), \quad (14)$$

其中: 第一项为数据保真项, 第二项为 OGS-HL 正则项, λ 为正则项系数。

3 模型求解

OGS-HL 算法的模型是一个综合算法模型, TV, OGS-TV, OGS-HL 算法可以通过对模型设置不同的参数值来分别表示, 如表 1 所示。

表 1 不同算法的参数设置

算法	K	q
TV	1	1
OGS-TV	$2n+1(n=1, 2, \dots, n)$	1
OGS-HL	$2n+1(n=1, 2, \dots, n)$	$0.5 \leq q < 1$

由于算法模型包含的矩阵数据量大并且复杂, 因此本文采用交替方向乘子 (alternating direction method

of multipliers, ADMM) 算法^[18], 将模型转化为多个子问题来求解, 式 (14) 引入变量 $\mathbf{u}$, 将模型转化为

$$\min_{f, \mathbf{u}} \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \lambda \varphi_{\text{OH}}(\mathbf{u}) \text{ s.t. } \mathbf{f} = \mathbf{u}. \quad (15)$$

通过引入惩罚项 $\frac{1}{2} \|\mathbf{f} - \mathbf{u}\|_2^2$, 得到一个无约束的优化函数:

$$\min_{f, \mathbf{u}} \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \lambda \varphi_{\text{OH}}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{f} - \mathbf{u}\|_2^2. \quad (16)$$

上述优化函数可分解为 2 个子问题来分别更新 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{u}$:

$$\min_f \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{f} - \mathbf{u}^{(k)}\|_2^2, \quad (17)$$

$$\min_{\mathbf{u}} \lambda \varphi_{\text{OH}}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{u}\|_2^2, \quad (18)$$

其中: 式 (17) 采用梯度下降法来更新 $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - [\mu \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{p}) + (\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k)})]. \quad (19)$$

式 (18) 进一步采用 ADMM 算法来求解, 引入辅助变量 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$, 引入拉格朗日乘子 $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ 和惩罚参数 δ , 转化为以下包含多个变量的增广拉格朗日函数来更新:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = & \frac{1}{2} \|\mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{u}\|_2^2 + \lambda \{\phi(\mathbf{x}_1) + \phi(\mathbf{x}_2)\} \\ & + \mathbf{w}_1^T (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{w}_2^T (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{x}_2) \\ & + \frac{\delta}{2} \{\|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} - \mathbf{x}_1\|_2^2 + \|\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{x}_2\|_2^2\}, \\ \text{s.t. } & \mathbf{x}_1 = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 = \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (20)$$

Step1: 更新 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$, 根据式 (20), $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 的子问题可以由式 (21) 和式 (22) 来更新:

$$\mathbf{x}_1^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{x}_1} \lambda \phi_{\text{OH}}(\mathbf{x}_1) + \frac{\delta}{2} \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right\|_2^2, \quad (21)$$

$$\mathbf{x}_2^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{x}_2} \lambda \phi_{\text{OH}}(\mathbf{x}_2) + \frac{\delta}{2} \left\| \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{w}_2^{(k)}}{\delta} \right\|_2^2. \quad (22)$$

该子问题的结构比较复杂, 故采用主分量最小化法 (majorization minimization, MM) 来求解上述最小化问题^[19]. 由于 2 个子问题是相同的结构, 下面只阐述式 (21) 的更新步骤。

为了方便后续计算, 式 (21) 可简化为

$$\mathbf{x}_1^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{x}_1} \left\{ R(\mathbf{x}_1) := \frac{\delta}{2} \left\| \mathbf{x}_1 - \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(k)} + \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right) \right\|_2^2 + \lambda \phi_{\text{OH}}(\mathbf{x}_1) \right\}. \quad (23)$$

首先, 需找到 $\phi_{\text{OH}}(\mathbf{x}_1)$ 的优化目标函数, 根据均值不等式, 可以得到:

$$\frac{1}{2 \|\mathbf{a}_{(i,j),K}\|_2^q} \left(q \|\mathbf{a}_{(i,j),K}\|_2^{q-1} \odot |\mathbf{x}_{1(i,j),K}| \right)_2^2 + (2-q) \|\mathbf{a}_{(i,j),K}\|_2^q \geq \|\mathbf{x}_{1(i,j),K}\|_2^2, \quad (24)$$

其中: $\mathbf{a}_{(i,j),K}$ 是 $\phi_{\text{OH}}(\mathbf{x}_1)$ 中的任意一项, 对于任意的 $\mathbf{a}_{(i,j),K}$, $\mathbf{x}_{1(i,j),K} \neq 0$, 并且 $\mathbf{a}_{(i,j),K} = \mathbf{x}_{1(i,j),K}$ 时, 对每一个稀疏组, 代入式 (24) 可以得到 $\phi_{\text{OH}}(\mathbf{x}_1)$ 的优化目标函数:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\|\mathbf{a}_{(i,j),K}\|_2^q} \left(q \|\mathbf{a}_{(i,j),K}\|_2^{q-1} \odot |\mathbf{x}_{1(i,j),K}| \right)_2^2 \\ & + (2-q) \|\mathbf{a}_{(i,j),K}\|_2^q. \end{aligned} \quad (25)$$

根据式 (24) 能够证明 $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) \geq \phi(\mathbf{x}_1)$, 并且 $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{a})$. 通过简单的计算, $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{a})$ 可以写为

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = \frac{q}{2} \|\Lambda(\mathbf{a}) (|\mathbf{a}|^{q-1} \odot |\mathbf{x}_1|)\|_2^2 + C, \quad (26)$$

其中: C 是一个常数, $\Lambda(\mathbf{a})$ 是对角矩阵, 其对角的元素为

$$[\Lambda(\mathbf{a})]_{l,l} = \sqrt{\sum_{i,j=-m_1}^{m_2} \left(\sum_{k_1,k_2=-m_1}^{m_2} |\mathbf{a}_{r-i+k_1,t-j+k_2}|^{2q} \right)^{-1/2}}, \quad (27)$$

其中: $r, t = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, n^2$, $\Lambda(\mathbf{a})$ 是通过二维卷积运算来求解, 则式 (23) 中 $R(\mathbf{x}_1)$ 的优化目标函数如:

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = & \frac{\delta}{2} \left\| \mathbf{x}_1 - \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(k)} + \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right) \right\|_2^2 + \lambda \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) \\ = & \frac{\delta}{2} \left\| \mathbf{x}_1 - \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(k)} + \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right) \right\|_2^2 \\ & + \frac{\lambda q}{2} \|\Lambda(\mathbf{a}) (|\mathbf{a}|^{q-1} \odot |\mathbf{x}_1|)\|_2^2 + \lambda C. \end{aligned} \quad (28)$$

式 (28) 可以得出 $\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{a}) \geq R(\mathbf{x}_1)$, $\xi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = R(\mathbf{a})$. 故 $\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{a})$ 也满足 MM 算法的前提条件, 为了极小化 $R(\mathbf{x}_1)$, 使用 MM 算法迭代, 初始化 $\mathbf{x}_1^{(0)}$, 反复极小化替代函数 $\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1^{(k)})$, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(k+1)} = & \arg \min_{\mathbf{x}_1} \xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1^{(k)}) \\ = & \arg \min_{\mathbf{x}_1} \frac{\delta}{2} \left\| \mathbf{x}_1 - \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(k)} + \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right) \right\|_2^2 \\ & + \frac{\lambda q}{2} \|\Lambda(\mathbf{x}_1^{(k)}) (|\mathbf{x}_1^{(k)}|^{q-1} \odot |\mathbf{x}_1|)\|_2^2. \end{aligned} \quad (29)$$

根据欧拉—拉格朗日方程, 式 (29) 可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(k+1)} = & \left[\delta \mathbf{E} + \lambda q \Lambda(\mathbf{x}_1^{(k)})^T \Lambda(\mathbf{x}_1^{(k)}) S(\mathbf{x}_1^{(k)}) \right]^{-1} \\ & \cdot \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(k)} + \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

其中: $\mathbf{E}$ 是一个全 1 的单位矩阵, $\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) = \text{diag}(|\mathbf{x}_1|^{2q-2})$ 。

Step2: 更新 $\mathbf{w}_1$ 和 $\mathbf{w}_2$, 拉格朗日乘子 $\mathbf{w}_1$ 和 $\mathbf{w}_2$ 的更新公式为

$$\mathbf{w}_1^{(k+1)} = \mathbf{w}_1^{(k)} + \delta (\nabla_x \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{x}_1^{(k+1)}), \quad (31)$$

$$\mathbf{w}_2^{(k+1)} = \mathbf{w}_2^{(k)} + \delta (\nabla_y \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{x}_2^{(k+1)}). \quad (32)$$

Step3: 更新 $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ 的子问题的更新公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{u}} & \frac{1}{2} \|\mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{u}\|_2^2 + \frac{\delta}{2} \left\{ \left\| \nabla_x \mathbf{u} - \mathbf{x}_1^{(k+1)} + \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right\|_2^2 \right. \\ & \left. + \left\| \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{x}_2^{(k+1)} + \frac{\mathbf{w}_2^{(k)}}{\delta} \right\|_2^2 \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

上述 $\mathbf{u}$ 子问题的优化目标是二次泛函, 故可以求解下述等效正态方程:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{E} + \delta (\nabla_x^T \nabla_x + \nabla_y^T \nabla_y) \right] \mathbf{u} = & \mathbf{f}^{(k+1)} + \delta \left[\nabla_x^T \left(\mathbf{x}_1^{(k+1)} - \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right) \right. \\ & \left. + \nabla_y^T \left(\mathbf{x}_2^{(k+1)} - \frac{\mathbf{w}_2^{(k)}}{\delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

显然, 式 (34) 含有二维卷积运算, 因此不能直接求出 $\mathbf{u}$ 子问题的最优解, 空域中的卷积运算在频域中会转化为普通的乘法运算, 故采用二维快速傅里叶变换与逆变换来求解:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = F^{-1} \left\{ \frac{F(\mathbf{f}^{(k+1)}) + \delta F \left[\nabla_x^T \left(\mathbf{x}_1^{(k+1)} - \frac{\mathbf{w}_1^{(k)}}{\delta} \right) + \nabla_y^T \left(\mathbf{x}_2^{(k+1)} - \frac{\mathbf{w}_2^{(k)}}{\delta} \right) \right]}{\mathbf{E} + \delta F(\nabla_x^T \nabla_x + \nabla_y^T \nabla_y)} \right\}, \quad (35)$$

其中: F 和 F^{-1} 分别是快速傅里叶变换和快速傅里叶逆变换。

基于 OGS-HL 的稀疏角度 CT 重建算法步骤:

初始化变量: $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)} = 0$, $\mathbf{w}_1^{(0)} = \mathbf{w}_2^{(0)} = 0$, $\mathbf{x}_1^{(0)} = \mathbf{x}_2^{(0)} = 0$, $k = 0$, $\text{maxloop} = 30$;

选择参数: $\mu, \lambda, \delta, q, K$;

主程序迭代: $k < \text{maxloop}$;

利用式(16)来更新 $\mathbf{f}^{(k+1)}$;

利用式(18)、式(19)使用MM算法来更新 $\mathbf{x}_1^{(k+1)}$, $\mathbf{x}_2^{(k+1)}$;

利用式(28)、式(29)来更新拉格朗日乘子 $\mathbf{w}_2^{(k+1)}$, $\mathbf{w}_2^{(k+1)}$;

利用式(30)来更新 $\mathbf{u}^{(k+1)}$; $k = k + 1$;

结束迭代: $k = \text{maxloop}$, 输出 $\mathbf{u}$;

4 实验结果

4.1 实验设置

为验证 OGS-HL 算法在稀疏角度 CT 重建下的效果, 本文选取其他经典的算法与 OGS-HL 算法作对比。

实验采用仿真模型和真实模型来验证算法。实验配置为: 11th Gen Intel (R) Core (TM) i5-11260H @ 2.60 GHz 的 CPU, Nvidia RTX3050ti (4 GB) 的 GPU, 16 GB 的内存, 实验软件为 MATLAB R2019b。本文算法与选取的对比算法均在 MATLAB 和使用 MEX 函数编译的 C++ 的混合模式中实现, 接口在 MATLAB 中实现。

4.2 仿真小鼠实验

仿真实验采用 MOBY 软件生成的小鼠胸腔截面作为测试模型, 在血液中注入 1.2% 的碘造影剂, 胸腔模型尺寸为 20 mm×20 mm, 分辨率为 512×512, 如图 1 所示。

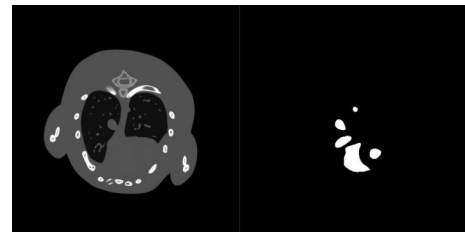


图 1 仿真小鼠胸腔模型和碘造影剂

Fig. 1 The simulated mouse thorax phantom and the iodine contrast agent

投影数据由等距扇形束几何采集, X 射线源到旋转中心的距离为 100 mm, 物体半径为 10 mm, 每个探测器长度为 20 mm, 探测器有 320 个单元, 每个单元的长度为 0.0625 mm。每条 X 射线发射的光子数为 5×10^4 , 计算沿每条 X 射线路径的预期光子数, 为了模拟数据噪声, 根据泊松分布生成随机数, 其中方差为上述期望的光子数, 然后进行对数运算, 得到无噪声和有噪声的投影数据。使用分裂布雷格曼 (Split-Bregman, SB) 算法的重建的无噪声图像作为参考图像^[20]。在 360° 范围内进行等间隔采样, 设置的采样间隔角度分别为 6°、4°、3° 和 2°, 得到的稀疏投影角度个数为 60、90、120 和 180。本节实验采用归一化均方根误差 (NRMSE)、峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似度指数 (SSIM) 来评价噪声投影数据中重建图像的质量。

在 OGS-TV 算法中, 经过多次实验, 参数为 $\mu = 50$, $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, $\delta = 1$, $q = 1$, $K = 3$ 。在 OGS-HL 算法中, 参数为 $\mu = 50$, $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, $\delta = 1$, $q = 0.8$, $K = 3$ 。

图 2 展示了 6 种不同算法下不同角度的仿真小鼠重建图像, 图 3 展现了仿真小鼠骨的部分 ROI 区域。从图 2 可以看出, FBP 和 SART 两种算法在四个不同

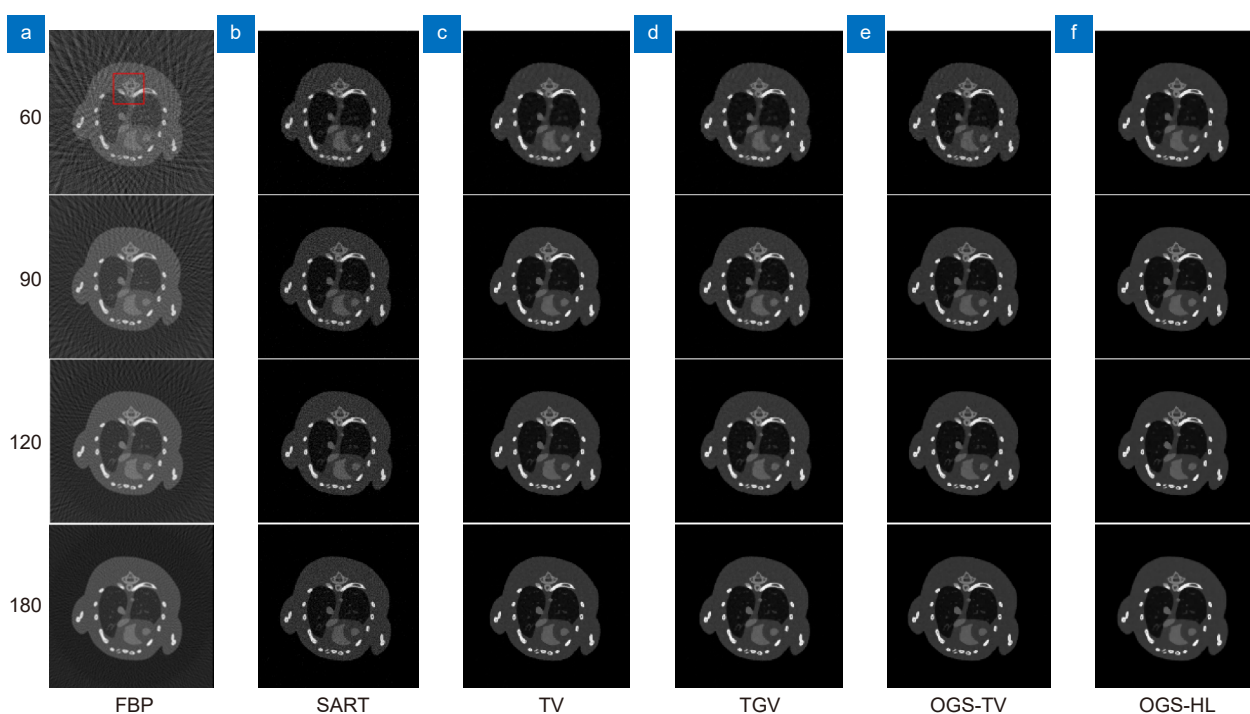


图 2 仿真小鼠重建结果: (a) FBP; (b) SART; (c) TV; (d) TGV; (e) OGS-TV;
(f) OGS-HL。从上到下依次为投影幅数为 60、90、120 和 180 的重建图像

Fig. 2 The reconstruction results of the simulated mouse model: (a) FBP; (b) SART; (c) TV; (d) TGV; (e) OGS-TV;
(f) OGS-HL. From top to bottom, the reconstructed images are from 60, 90, 120 and 180

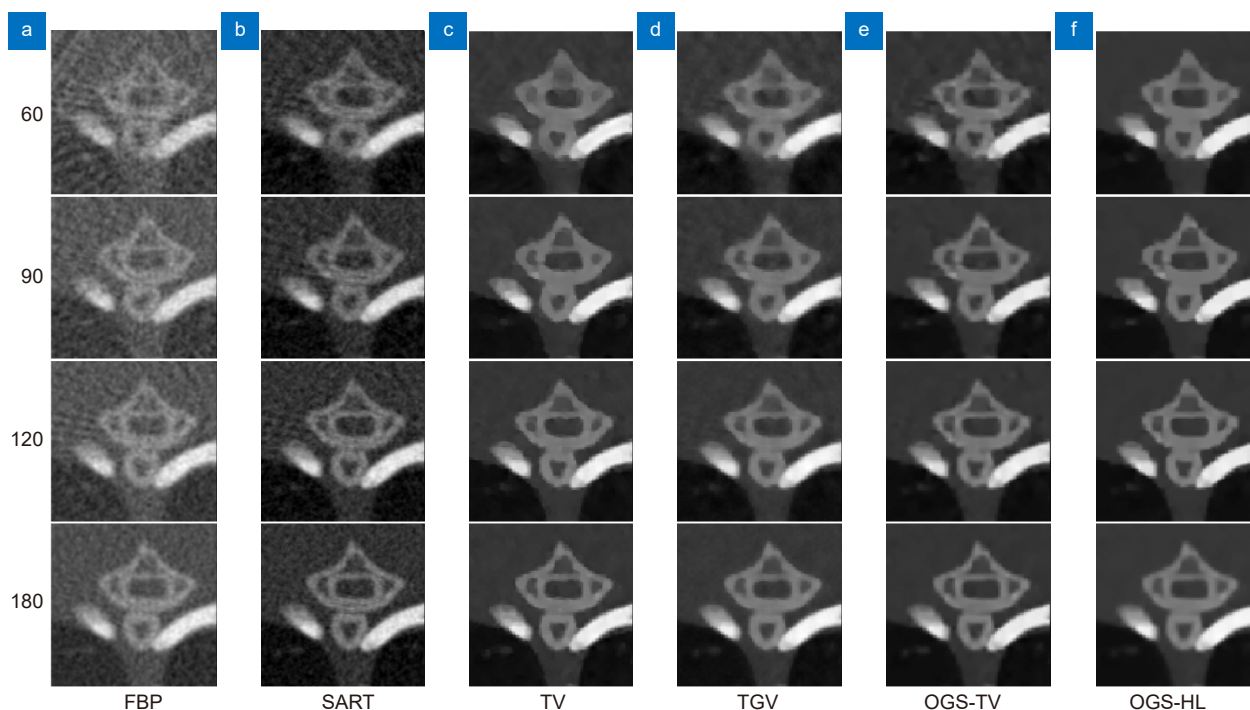


图 3 仿真小鼠重建图像 ROI 区域: (a) FBP; (b) SART; (c) TV; (d) TGV; (e) OGS-TV;
(f) OGS-HL。从上到下依次为投影幅数为 60、90、120 和 180 的 ROI 区域

Fig. 3 The reconstruction results of the simulated mouse model: (a) FBP; (b) SART; (c) TV; (d) TGV; (e) OGS-TV;
(f) OGS-HL. From top to bottom, the ROI regions are 60, 90, 120 and 180

的角度下重建的图像中含有大量的伪影和噪声。从图 3 的 ROI 区域中仿真小鼠的骨切面可以看出 TV 算法重建的图像出现阶梯伪影, 使得骨切面的边缘变得不清晰。TGV 算法虽然能够克服 TV 算法出现的问题, 但对 60、90 和 120 角度下骨切面周围产生的条纹伪影去除效果较差。OGS-TV 算法在稀疏角度下重建的图像都有较大的改进, 但对噪声的抑制效果一般。OGS-HL 算法不仅能够消除稀疏角度下产生的伪影,

并且能够很好地抑制噪声, 对小鼠骨切面周围的噪声消除以及骨切面的边缘保护有着良好的效果。

图 4 绘制了五种算法在重建图像过程中在四个不同角度下 NRMSE、PSNR 和 SSIM 评价指标的收敛曲线图。从图 4 可以看出, OGS-HL 算法对于图像重建的效果对比其他算法有所提升, 其在 180 角度下的提升较小, 在 120 角度下重建的效果提升, 在 60 和 90 角度下的重建效果提升较为明显。仿真试验结果

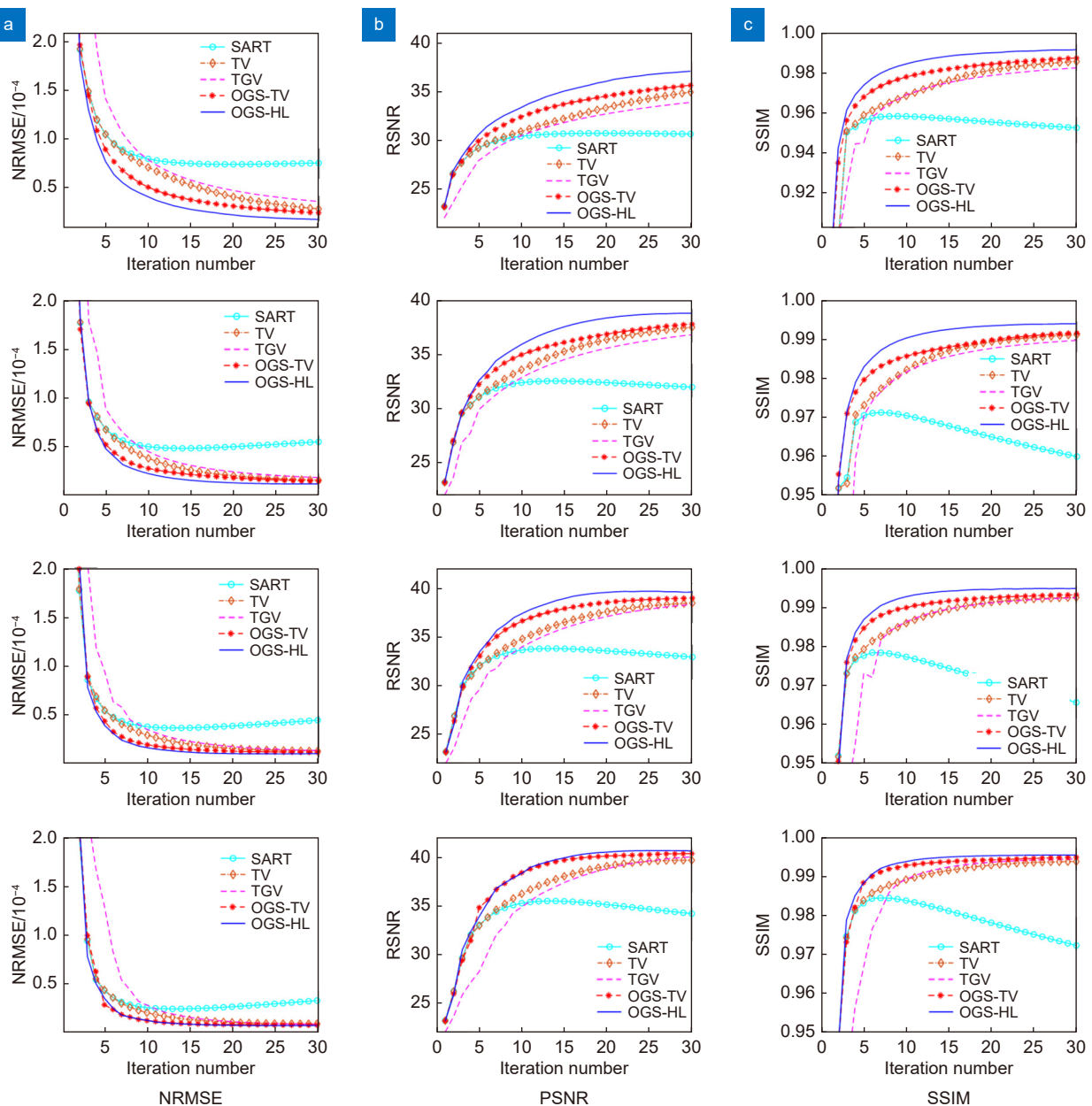


图 4 仿真小鼠模型重建效果的三种评价指标: (a) NRMSE; (b) PSNR; (c) SSIM。从上到下依次为投影幅数为 60、90、120 和 180 的重建图像的数量性评价指标

Fig. 4 Three quantitative evaluation indexes of the reconstruction effect of the simulated mouse model: (a) NRMSE; (b) PSNR; (c) SSIM. From top to bottom, the quantitative evaluation indexes of the reconstructed images from 60, 90, 120 and 180

表明, OGS-HL 算法在稀疏角度重建的条件下会保持良好的优势, 能够提升重建图像的质量。

4.3 临床小鼠实验

为了进一步说明 OGS-HL 算法的有效性, 本节实验使用 MARS (Medipix All Resolution System) 微型 CT 上采集的来自真实临床前小鼠的投影数据。重建的 CT 图像覆盖面积为 $18.41\text{ mm} \times 18.41\text{ mm}$, 分辨率为 512×512 。投影数据采用等距扇形束几何采集, X 射线源到旋转中心的距离为 158 mm , 到探测器的距离为 255 mm 。在 360° 范围内进行等间隔采样, 设置的采样间隔角度分别为 6° 、 4° 、 3° 和 2° , 得到的稀疏投影角度个数为 60、90、120 和 180。

在 OGS-TV 算法中, 经过多次实验, 参数为 $\mu = 50$, $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, $\delta = 0.1$, $q = 1$, $K = 3$ 。在 OGS-HL 算法中, 参数为 $\mu = 50$, $\lambda = 2 \times 10^{-4}$, $\delta = 0.1$, $q = 0.8$, $K = 3$ 。

图 5 展示了 6 种不同算法下不同角度的临床真实小鼠重建图像, 图 6 展现了临床真实小鼠骨的部分 ROI 区域。从图 5 可以看出, 每个算法重建的效果与以上仿真小鼠重建实验的效果基本相同, 在四个不同

的角度下 FBP 算法和 SART 算法重建过程产生了大量的伪影和噪声。从图 6 的 ROI 区域看出, TV 算法下小鼠骨切面的边缘出现伪影, 且含有少量的噪声, TGV 算法在 60° 、 90° 角度和 120° 角度下的噪声去除并不明显, OGS-TV 算法也含有少量的噪声, OGS-HL 对于骨切面周围噪声的消除和边缘的保护有良好的效果。从实验结果和 ROI 区域可以看出, OGS-HL 算法在稀疏角度条件下的重建效果优于其他算法。

5 结 论

为了进一步提升稀疏角度 CT 图像的重建质量, 本文将 OGS 和 HL 应用于稀疏角度 CT 图重建, 得到 OGS-HL 稀疏角度 CT 迭代重建算法。相比于传统的 TV 正则项, OGS 正则项考虑每个像素点梯度重叠组的信息, 度量图像梯度稀疏性, 克服了图像重建过程中产生的阶梯伪影, 取得了不错的重建效果。图像的梯度服从重尾分布, HL 先验可以很好地近似图像梯度的重尾分布, 达到抑制噪声的效果。通过以上仿真小鼠和临床小鼠两个实验结果表明, OGS-HL 算法对于稀疏角度 CT 图像重建的图像质量提升明显, 具

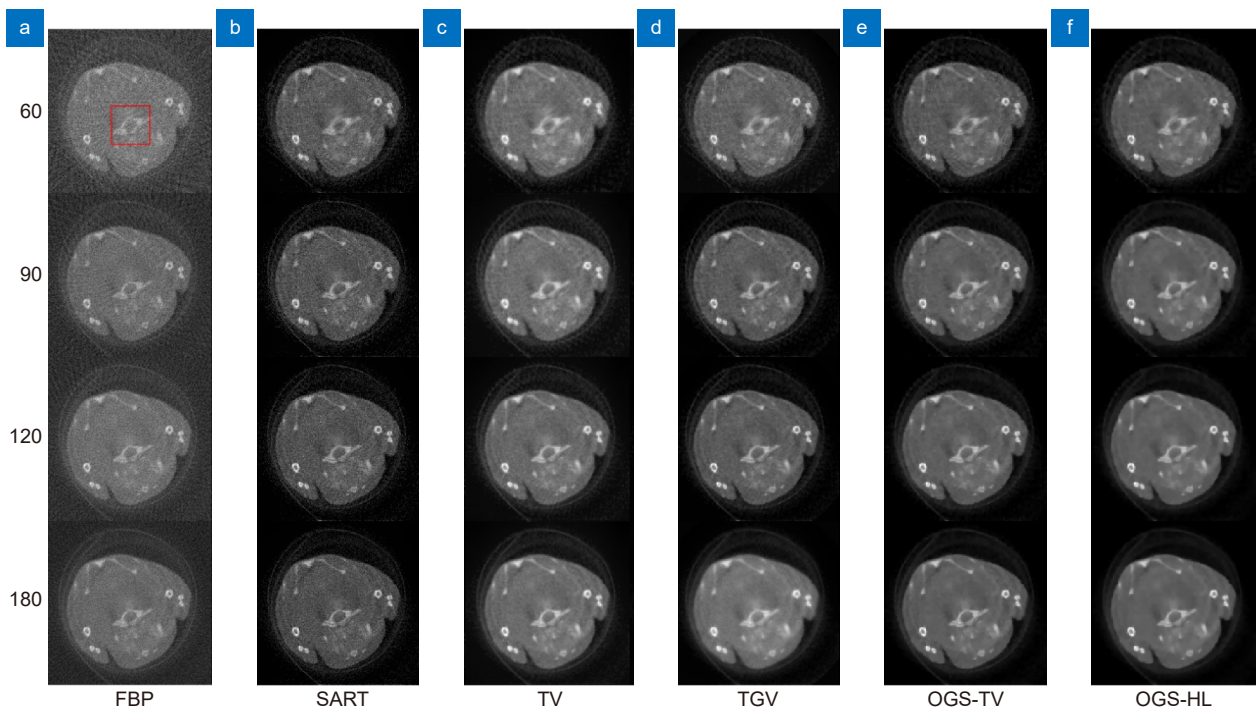


图 5 临床小鼠模型重建结果: (a) FBP; (b) SART; (c) TV; (d) TGV; (e) OGS-TV; (f) OGS-HL。从上到下依次为投影幅数为 60、90、120 和 180 的重建图像

Fig. 5 The reconstruction results of the clinical mouse model: (a) FBP; (b) SART; (c) TV; (d) TGV; (e) OGS-TV; (f) OGS-HL. From top to bottom, the reconstructed images are from 60, 90, 120 and 180

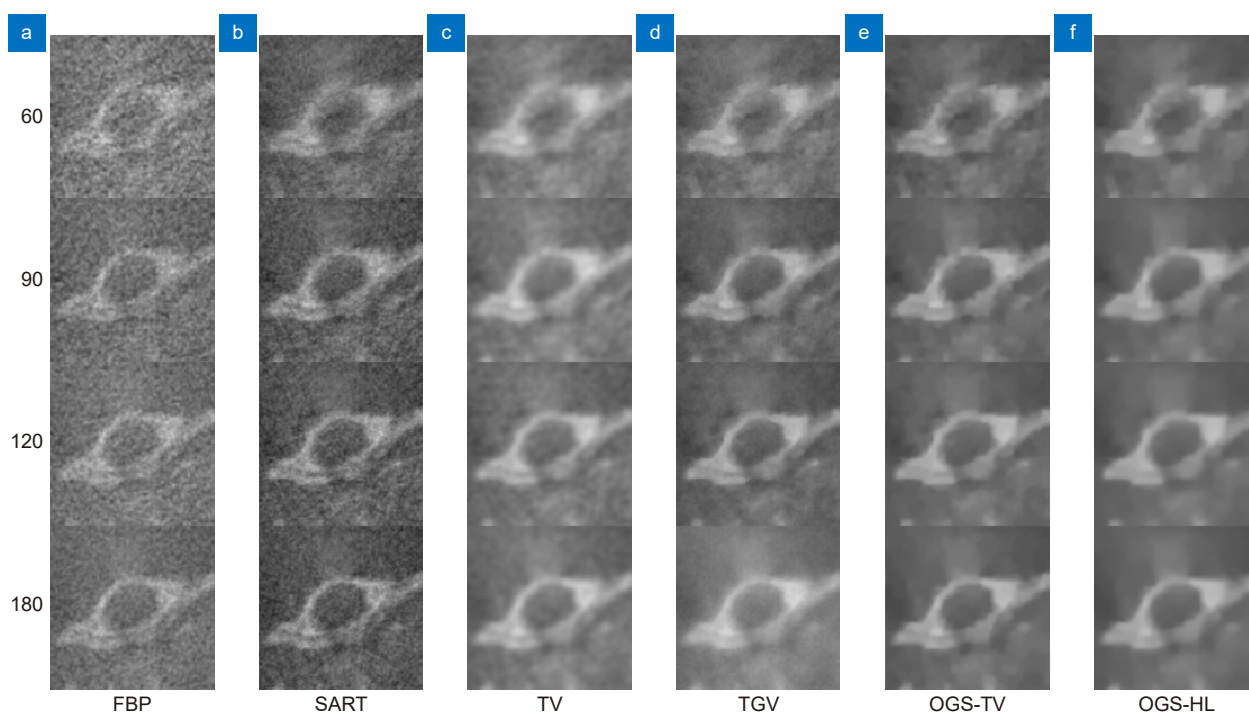


图6 临床小鼠模型重建图像 ROI 区域: (a) FBP; (b) SART; (c) TV; (d) TGV; (e) OGS-TV; (f) OGS-HL。从上到下依次为投影幅数为 60、90、120 和 180 的 ROI 区域

Fig. 6 The reconstruction results of the clinical mouse model: (a) FBP; (b) SART; (c) TV; (d) TGV; (e) OGS-TV; (f) OGS-HL. From top to bottom, the ROI regions are 60, 90, 120, and 180

有较好的鲁棒性。本文是基于模型的稀疏 CT 重建方法, 侧重于物理模型和数学算法, 而基于深度学习的稀疏 CT 重建方法则注重于数据驱动和自主学习能力, 更侧重于大量的 CT 数据作为训练样本, 通过学习数据中的信息来实现重建。由于本文进行的实验没有大量的训练数据集, 故采用基于模型的算法来实现重建。在参数选择上, 正则项参数 λ 和惩罚参数 δ 的选择对重建图像的效果极为重要, 但是, 本文这两个参数的选取为经验选取, 导致进行实验时耗费的时间较长, 之后的研究会进一步改进模型, 使算法模型更加灵活简便。

利益冲突: 所有作者声明无利益冲突

参考文献

- [1] Jouini M S, Keskes N. Numerical estimation of rock properties and textural facies classification of core samples using X-ray computed tomography images[J]. *Appl Math Modell*, 2017, **41**: 562–581.
- [2] Brenner D J, Hall E J. Computed tomography-an increasing source of radiation exposure[J]. *N Engl J Med*, 2007, **357**(22): 2277–2284.
- [3] Wang G, Yu H Y, Ye Y B. A scheme for multisource interior tomography[J]. *Med Phys*, 2009, **36**(8): 3575–3581.
- [4] Xu Q, Yu H Y, Mou X Q, et al. Low-dose X-ray CT reconstruction via dictionary learning[J]. *IEEE Trans Med Imaging*, 2012, **31**(9): 1682–1697.
- [5] Yu W, Wang C X, Nie X Y, et al. Image reconstruction for few-view computed tomography based on ℓ_0 sparse regularization[J]. *Procedia Comput Sci*, 2017, **107**: 808–813.
- [6] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306.
- [7] Zhang W K, Zhang H M, Wang L Y, et al. Limited angle CT reconstruction by simultaneous spatial and radon domain regularization based on TV and data-driven tight frame[J]. *Nucl Instrum Methods Phys Res Sect A: Accel, Spectrom, Detect Assoc Equip*, 2018, **880**: 107–117.
- [8] Miao J Y, Cao H L, Jin X B, et al. Joint sparse regularization for dictionary learning[J]. *Cogn Comput*, 2019, **11**(5): 697–710.
- [9] Li M, Fan Z T, Ji H, et al. Wavelet frame based algorithm for 3D reconstruction in electron microscopy[J]. *SIAM J Sci Comput*, 2014, **36**(1): B45–B69.
- [10] Wang Y L, Yang J F, Yin W T, et al. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction[J]. *SIAM J Imaging Sci*, 2008, **1**(3): 248–272.
- [11] Sidky E Y, Kao C M, Pan X C. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT[J]. *J X-Ray Sci Technol*, 2006, **14**(2): 119–139.
- [12] Zhang X F, Liu H B. Linear programming-based reconstruction algorithm for limited angular sparse-view tomography[J]. *Opt Lasers Eng*, 2021, **140**: 106524.
- [13] Lian X Y, Kong H H, Pan J X, et al. Joint multi-channel total generalized variational algorithm for spectral CT reconstruction[J]. *Opto-Electron Eng*, 2021, **48**(9): 210211.

连祥媛, 孔慧华, 潘晋孝, 等. 多通道联合的广义总变分能谱CT重

- 建[J]. 光电工程, 2021, 48(9): 210211.
- [14] Bao P, Zhou J L, Zhang Y. Few-view CT reconstruction with group-sparsity regularization[J]. *Int J Numer Methods Biomed Eng*, 2018, 34(9): e3101.
- [15] Jon K, Sun Y, Li Q X, et al. Image restoration using overlapping group sparsity on hyper-Laplacian prior of image gradient[J]. *Neurocomputing*, 2021, 420: 57–69.
- [16] Liu J, Huang T Z, Selesnick I W, et al. Image restoration using total variation with overlapping group sparsity[J]. *Inform Sci*, 2015, 295: 232–246.
- [17] Kong J, Lu K S, Jiang M. A new blind deblurring method via Hyper-Laplacian prior[J]. *Procedia Comput Sci*, 2017, 107: 789–795.
- [18] Boyd S P, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Found Trends Mach Learn*, 2011, 3(1): 1–122.
- [19] Hunter D R, Lange K. A tutorial on MM algorithms[J]. *Am Stat*, 2004, 58(1): 30–37.
- [20] Kong H H, Liu R, Yu H Y. Ordered-subset split-Bregman algorithm for interior tomography[J]. *J X-Ray Sci Technol*, 2016, 24(2): 221–240.

作者简介



齐子文 (1998-), 男, 中北大学数学学院硕士研究生, 研究方向为 CT 图像处理和图像重建。
E-mail: 554688281@qq.com



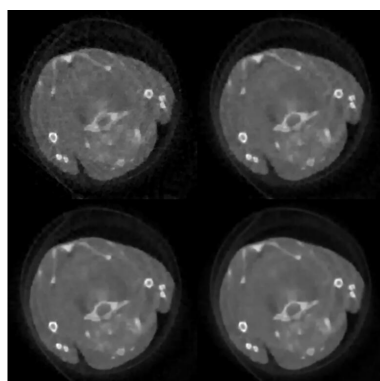
【通信作者】孔慧华 (1977-), 女, 博士, 教授, 中北大学数学学院硕士生导师, 2011 年获中北大学信息处理与重建专业博士学位, 2007 年获中北大学优秀青年主讲教师称号, 指导全国大学生数学建模竞赛获全国二等奖 3 项, 山西省一等奖 3 项。目前主要从事 CT 图像重建、工程中的数学问题的研究。
E-mail: huihuak@163.com



扫描二维码, 获取PDF全文

Overlapping group sparsity on hyper-Laplacian prior of sparse angle CT reconstruction

Qi Ziwen^{1,2}, Kong Huihua^{1,2*}, Li Jiaxin^{1,2}, Pan Jinxiao^{1,2}



The reconstruction results of the mouse model by OGS-HL at 60, 90, 120 and 180 angles

Overview: X-ray computed tomography (CT) is an imaging technique to obtain the across section information of an object through X-ray projection measurement at different angles, which has been widely used in industry, clinical diagnosis and other fields. However, additional X-ray radiation during clinical examination can lead to cancer and other genetic changes. In order to reduce the dose of X-ray radiation, sparse angle projection is used to add the scanning interval and reduce the number of projection times, and a small amount of projection data is used to achieve image reconstruction. However, this method will reduce the quality of the reconstructed image, there will be more artifacts and noise, and it is difficult to meet the requirements of industrial and medical diagnosis. In order to improve the quality of reconstructed images under sparse sampling, a sparse angle CT reconstruction algorithm based on overlapping group sparsity and hyper-Laplacian prior is proposed in this paper. The sparse regular term of the overlapping group improves the sparsity of the image gradient. The structure information of the image gradient is used as the measurement standard of the image gradient sparsity, which fully considers the gradient information of the pixel neighborhood, and regroups the gradient information by two norms to increase the difference between the smooth region and the image edge region. Since the gradient of the image basically follows the heavy-tailed distribution, the hyper-Laplacian prior can accurately approximate the heavy tail distribute-on of the image gradient, this regular term can suppress the noise generated in the reconstruction process. Combining the advantages of the two regular terms, the algorithm can effectively overcome the staircase artifacts while recovering the edge of the image, and remove the noise generated in the reconstruction. In this paper, alternate direction multiplier method, principal component minimization method and gradient descent method are used to solve the objective function. The experimental data of the simulated mouse model and the clinical mouse model were used in this study. The peak signal-to-noise ratio (PSNR), normalized root-mean-square error (NRMSE) and structural similarity index (SSIM) were used as indicators to evaluate different algorithms, and regions of interest were added to compare the reconstructed images, so that the differences of different algorithms could be more clearly seen from the structural details of the mouse model. The experimental results show that the proposed algorithm has some improvements in preserving the details of image structure and suppressing noise and staircase artifacts in the process of image reconstruction.

Qi Z W, Kong H H, Li J X, et al. Overlapping group sparsity on hyper-Laplacian prior of sparse angle CT reconstruction[J]. *Opto-Electron Eng*, 2023, 50(10): 230167; DOI: [10.12086/oe.2023.230167](https://doi.org/10.12086/oe.2023.230167)

Foundation item: Project supported by National Natural Science Foundation of China (62201520, 62103384, 62122070), and Basic Research Project of Shanxi Province Fund (202103021224190)

¹School of Mathematics, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China; ²Shanxi Key Laboratory of Signal Capturing & Processing, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China

* E-mail: huihuak@163.com