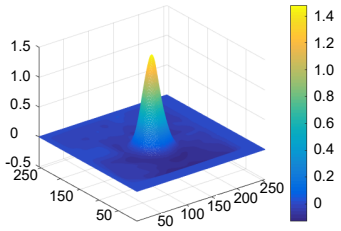
Opto-Electronic Engineering
光 电 工 程

Article
2021 年，第 48 卷，第 2 期

DOI: 10.12086/oee.2021.200160

基于 B 样条函数的快速波前复原



陈　浩[1,2*]，魏　凌[1,2]，李恩德[1,2]，何　益[3,4]，
杨金生[1]，李喜琪[1,2]，樊新龙[1]，杨泽平[1]，张雨东[1,2]

[1] 中国科学院光电技术研究所，自适应光学重点实验室，四川 成都 610209；
[2] 中国科学院大学材料科学与光电子技术学院，北京 100049；
[3] 江苏材料光学重点实验室，江苏 苏州 215163；
[4] 中国科学院苏州生物医学工程技术研究所，江苏 苏州 215163

摘要：从斜率复原波前是夏克-哈特曼波前传感器这一类斜率采样探测器的核心流程。传统的复原算法中，区域法对局部波前的复原效果好，但易受斜率噪声的影响，同时空间分辨率较低；模式法抗噪能力强，但没有精确复原局部波前的能力。本文提出了基于 B 样条函数的快速复原算法，将波前展开为 B 样条曲面的线性组合，并将复原问题从斜率最小二乘问题转化为泊松方程，利用斜率的 Taylor 展开式估计散度，再通过超松驰迭代法进行快速求解。该方法将 B 样条函数的理论散度积分和实际散度估计分离，可以方便地扩展到不同阶次和不同节点数量的 B 样条基复原算法中。另外，通过改变散度估计的计算区域，可以灵活控制并平衡算法的局部复原能力和抗噪能力。对变形镜驱动器响应函数的测量实验表明，该方法具有较好的局部复原能力、抗噪能力和任意精度的空间分辨率。

关键词：B 样条；波前复原；哈特曼波前传感器
中图分类号：O436.3　　**文献标志码：**A

陈浩，魏凌，李恩德，等. 基于 B 样条函数的快速波前复原[J]. 光电工程，2021，**48**(2): 200160
Chen H, Wei L, Li E D, *et al.* A B-spline based fast wavefront reconstruction algorithm[J]. *Opto-Electron Eng*, 2021, **48**(2): 200160

A B-spline based fast wavefront reconstruction algorithm

Chen Hao[1,2*], Wei Ling[1,2], Li Ende[1,2], He Yi[3,4], Yang Jinsheng[1], Li Xiqi[1,2], Fan Xinlong[1], Yang Zeping[1], Zhang Yudong[1,2]

[1]Key Laboratory of Adaptive Optics, Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;
[2]College of Materials Science and Opto-Electronic Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
[3]Jiangsu Key Laboratory of Medical Optics, Suzhou, Jiangsu 215163, China;
[4]Suzhou Institute of Biomedical Engineering and Technology, Chinese Academy of Sciences, Suzhou, Jiangsu 215163, China

收稿日期：2020-05-11；　收到修改稿日期：2020-08-26
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61605210, 61675226, 61378090)；国家仪器专项(2012YQ120080)；国家重点研发计划课题资助项目(2016YFC0102500, 2017YFB0403700)
作者简介：陈浩(1992-)，男，博士，主要从事自适应光学、波前重建和图像处理的研究。E-mail：chenhao114@mails.ucas.ac.cn
版权所有©2021 中国科学院光电技术研究所

Abstract: Traditional schemes for Shack-Hartmann wavefront reconstruction can be classified into zonal and modal methods. The zonal methods are good at reconstructing the local details of the wavefront, but are sensitive to the noise in the slope data. The modal methods are much more robust to the noise, but they have limited capability of recovering the local details of the wavefront. In this paper, a B-spline based fast wavefront reconstruction algorithm in which the wavefront is expanded to the linear combination of bi-variable B-spline curved surfaces is proposed. Then, a method based on successive over relaxation (SOR) algorithm is proposed to fast reconstruct the wavefront. Experimental results show that the proposed algorithm can recover the local details of the wavefront as good as the zonal methods, while is much more robust to the slope noise.

Keywords: B-spline function; wavefront reconstruction; Hartmann wavefront sensor

1 引 言

夏克-哈特曼波前传感器(Shack-Hartmann wavefront sensor，简称哈特曼)是一种常用的斜率型波前探测器，被广泛应用于自适应光学的相关领域[1-3]。它并不能直接探测波前的相位信息，只能通过子孔径内的斜率重构波前相位。由于传感器的噪声、采样误差、子孔径内存在高阶像差等原因，斜率的计算易受噪声影响。尽管可以提高斜率计算的精度和抗噪能力[4-5]，为复原计算提供更精确的输入，然而，斜率探测误差是不能完全消除的，这需要波前复原算法具有抗噪能力。因此，波前复原算法需要综合考虑抗噪性、准确度和计算复杂性。常见的复原算法可以分为两类：区域法和模式法。

区域法在待测波前点与斜率测量点之间建立差分模型，然后通过求解线性的差分方程组复原波前信息，传统的区域法模型有 Fried[6]和 Southwell[7]等。这种方法具有良好的局部性，可以较精确地复原局部区域的像差，并且可以用于任意形状的光瞳。然而由于差分模型的精度及差分过程导致的误差，算法抗噪能力较弱。另外，由于差分模型的限制，复原的波前点数量与子孔径数量相当，需要通过插值来获得高空间分辨率的波前信息，而这会带来额外的误差。

模式法一般采用空间正交多项式复原波前。最常用的是 Zernike 多项式，因为它与 Seidel 像差有非常直接的对应关系[8]。模式法复原的波前具有解析表达式，可以得到任意空间分辨率的波前信息。由于 Zernike 多项式只在圆域内正交，因此只能复原圆形光瞳的波前，不少学者采用变换等方式使 Zernike 可以适用于方形或其它形状的光瞳[9]，但仍存在变换复杂，不能完全适用于所有形状光瞳的缺点。另外，尽管 Zernike 多项式在圆域内是正交的，但其导数并不正交，即各个模式的斜率不正交，因此会发生模式泄露，并且在不同阶次的 Zernike 空间中，展开系数是不一样的。Nam 等[10]提出正交化斜率矩阵的方法来解决这个问题，但此时的解空间已不再是原本的 Zernike 空间了。另外，由于正交多项式的非局部性，导致任一子孔径的斜率可能会对所有的模式产生影响，对边界上的波前复原精度较差，因此模式法不能很好地复原局部区域的像差。由于多项式的正交性，模式法一般适用于圆形光瞳或方形光瞳，当光瞳形状与预设不一致时，复原精度会受到比较严重的影响。

在高能激光[3]、光学加工检测[11]以及基于像差的 PSF 计算[12]等应用中，对局部像差的复原能力要求相对较高，而基于 Zernike 多项式的模式法由于局部性较差，并且复原的像差容易在边缘出现较大的值，在这些场合应用有限。

为了保证复原的局部性同时提高抗噪能力，样条函数的方法得到了广泛的应用。Seifert 等提出了一种采用三次 B 样条进行波前复原的方法[13]，该方法用二维三次样条曲面对波前进行最小二乘拟合。由于 B 样条曲面的平滑性和紧支撑特性，可以在保留局部性特征的同时，具有比传统区域法更强的抗噪声能力。文章仿真结果表明，随着样条数量的增多，局部复原精度越高，但当样条数量接近斜率采样点数量时，复原矩阵的条件数会增大，复原精度会有所下降。然而文章并未明确 B 样条数量的选择方法，只是建议针对应用场合的像差仿真来确定最优样条数量。Ares 定量比较了三次 B 样条波前复原算法与 Zernike 模式法的性能区别[14]，证实了对于复杂的波前，三次 B 样条复原方法更具有优势。随后，Cornelis 等提出了基于多变量的非线性样条波前重构方法(spline based aberration reconstruction, SABRE)[15]，该方法本质上属于区域法，通过特定的三角形分割方式，采用样条函数空间模型代替常规的差分模型，该方法可以适用于任意形状的光瞳和任意的子孔径布局。SABRE 方法在模型划分

时，有多种分割模型，不同分割模型的复原精度也不尽相同，而文章中并未提出分割模型的选择方法。Huang 等提出了一种使用局部化的三次样条函数复原波前的方法[16]，尽管能提高局部复原精度，但也更容易受到噪声的影响。Pant 使用加权的三次样条函数复原波前[17]，在提高算法抗噪能力的同时也提高了算法计算复杂度。

从以上文章可以看出，相比普通样条函数，B 样条函数在控制点处均具有相同的样条基函数，在抗噪能力和局部复原能力上均衡，计算复杂度也较小。本文以 2 阶 B 样条为例，提出了一种基于 B 样条函数的快速波前复原算法，并将原本的斜率最小二乘化问题转化为泊松方程，然后使用超松驰迭代法进行求解，大大减少算法的存储需求和计算量，若使用分块加速超松驰迭代法，还可以提高算法的并行程度，方便应用到多核 PC 系统、FPGA 或 DSP 等硬件平台上。

本文结构如下：第二节介绍基于 B 样条的波前重构算法；第三节介绍基于泊松方程的 2 阶 B 样条快速复原算法；第四节通过对驱动器响应函数测试的实验，将本算法与传统波前重建算法进行比较；第五节对全文进行总结和展望。

2 基于 B 样条的哈特曼波前快速复原算法

2.1 哈特曼基本原理

哈特曼波前传感器通过微透镜阵列、小孔或光栅等光学元件，将待测波前分割为 N 个小区域后，每个区域会在 CCD 上成像。当待测量波前与参考波前存在偏差时，这个偏差会转化为子孔径内光斑的偏移 $(\Delta x,\Delta y)_i, i=1,2,...,N$，令波前为 ϕ，微透镜焦距为 f，则有：

$$\nabla\phi_i=(\Delta x/f,\Delta y/f)_i^{\mathrm{T}}, i=1,2,...,N \quad 。 \tag{1}$$

波前重构算法即是通过采样到的 $\{\nabla\phi_i\}$ 复原出波前 ϕ。

2.2 B 样条曲线

B 样条(Basis spline)最初由 Isaac Jacob Schoenberg 提出，其具有几何不变性、凸包性、保凸性、局部支撑性等优良特性，是应用最广泛的样条函数之一[18]。

k 阶 B 样条曲面方程可表示为

$$f(u,v)=\sum_{i,j}a_{i,j}\cdot N_{i,k}(u)\cdot N_{j,k}(v) \quad , \tag{2}$$

其中：i 和 j 为节点序号，$a_{i,j}$ 为控制顶点，$N_{i,k}$ 及 $N_{j,k}$ 为 k 次规范 B 样条基函数，基函数为 k 次分段多项式，可由递推公式得到：

$$\begin{cases} N_{i,0}(u)=\begin{cases}1, & u\in[u_i,u_{i+1}]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \\ N_{i,k}(u)=\dfrac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i}\cdot N_{i,k-1}(u)+\dfrac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}\cdot N_{i+1,k-1}(u)\end{cases} \quad 。 \tag{3}$$

定义 $u_i=i$，即均匀采样的情况，则可以得到 1 阶和 2 阶 B 样条基函数分别为

$$N_{0,1}=\begin{cases}u, & u\in[0,1)\\ 2-u, & u\in[1,2]\end{cases} \quad , \tag{4}$$

$$N_{0,2}=\begin{cases}u^2/2, & u\in[0,1)\\ (-3+6u-2u^2)/2, & u\in[1,2)\\ (3-u)^2/2, & u\in[2,3]\end{cases} \quad 。 \tag{5}$$

图 1 绘制了控制节点间隔为 1 的 1 阶和 2 阶 B 样条基曲面。

2.3 基于 2 阶 B 样条基曲面的波前复原

为简化表述，令：

$$B(x,y)=N_{0,2}(x+1.5)\cdot N_{0,2}(y+1.5) \quad 。 \tag{6}$$

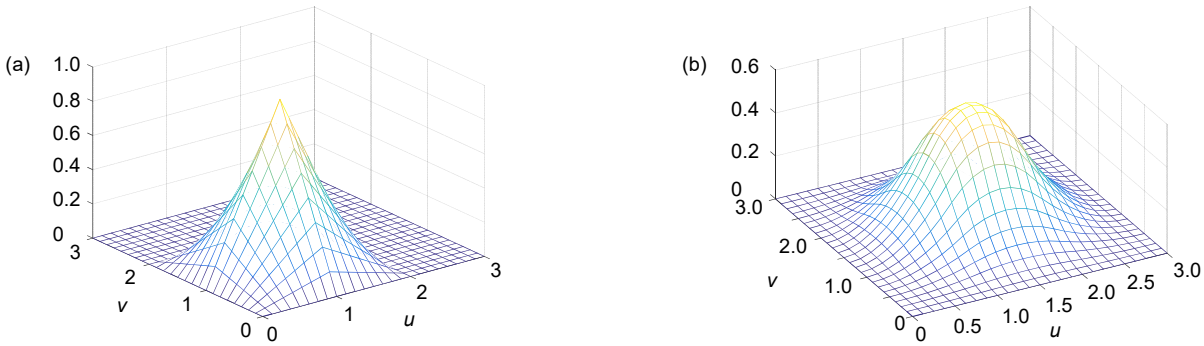


图 1 B 样条基曲面。(a) 1 阶 B 样条基曲面；(b) 2 阶 B 样条基曲面

Fig. 1 Surfaces of B-spline basis. (a) First-order B-spline surface; (b) Second-order B-spline surface

易知 $B(x,y)$ 为关于原点对称的函数。由 2.2 节知，$B(x,y)$ 具有紧支撑特性，通过将像差波面分解为一系列 $B(x,y)$ 波面的叠加，可以在有效抑制噪声的基础上更好地复原局部波前。

为使 B 样条复原的空间频率最高，需要 B 样条基的数量不少于波前采样点的数量，对于方形布局的微透镜阵列，在传统的区域法中，有两种常用的模型可以借鉴——Fried 模型和 Southwell 模型。

图 2 描述了这两种模型的 B 样条基位置与子孔径之间的关系。其中灰色圆圈表示样条基的位置，正方形为子孔径位置，正方形内的正交箭头为子孔径内斜率。

假设子孔径数量为 $(M\times N)$，为达到最优的空间分辨率，在 Fried 模型中，B 样条基数量为 $(M+1)\times(N+1)$，Southwell 模型中，由于 $B(0,0)=0$，需要在上下左右至少分别补充 1 排 B 样条基，即 B 样条基的数量最少为 $(M+2)\times(N+2)$。

以子孔径边长为单位，令左上角坐标为 $(0,0)$，则 Fried 模型和 Southwell 模型排布的 B 样条基分别如式(7)和式(8)所示：

$$B_{i,j}(x,y)=B(x-i,y-j)\quad, \tag{7}$$

式中：$i=0,1,\ldots,M,\ j=0,1,\ldots,N$。

$$B_{i,j}(x,y)=B(x-i-0.5,y-j-0.5)\quad, \tag{8}$$

式中：$i=0,1,\ldots,M+1,\ j=0,1,\ldots,N+1$。

则待重构的波前可表述为

$$\phi(x,y)=\sum_{i,j}a_{i,j}\cdot B_{i,j}(x,y)\quad, \tag{9}$$

代入式(1)，则对于每个子孔径有：

$$\begin{aligned}\nabla\phi_{m,n}&=(g^x_{m,n},g^y_{m,n})\\&=\left(\frac{\Delta x_{m,n}}{f},\frac{\Delta y_{m,n}}{f}\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(\iint\limits_{(x,y)\in D_{m,n}}\frac{\mathrm{d}\phi(x,y)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iint\limits_{(x,y)\in D_{m,n}}\frac{\mathrm{d}\phi(x,y)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(\sum_{i,j}a_{i,j}\iint\limits_{(x,y)\in D_{m,n}}\frac{\mathrm{d}B_{i,j}(x,y)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\right.\\&\qquad\left.\sum_{i,j}a_{i,j}\iint\limits_{(x,y)\in D_{m,n}}\frac{\mathrm{d}B_{i,j}(x,y)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\right)^{\mathrm{T}}\\&=(\sum_{i,j}a_{i,j}\cdot B^x_{i,j,m,n},\sum_{i,j}a_{i,j}\cdot B^y_{i,j,m,n})^{\mathrm{T}}\quad,\end{aligned} \tag{10}$$

式中：$D_{m,n}\ (m=0,1,\ldots,M-1,n=0,1,\ldots,N-1)$ 表示序号为 (m,n) 的子孔径瞳函数：

$$D_{m,n}(x,y)=\begin{cases}1, x\in[m,m+1]\ \text{and}\ \ y\in[n,n+1]\\0,\qquad\qquad\text{otherwise}\end{cases}\quad。 \tag{11}$$

因此，基于最小二乘的 B 样条重构即为求解方程组的最小二乘解，

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}\quad。 \tag{12}$$

以 Fried 模型为例，式中：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}B^x_{0,0,0,0} & B^x_{1,0,0,0} & \cdots & B^x_{M,N,0,0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B^x_{0,0,M-1,N-1} & B^x_{1,0,M-1,N-1} & \cdots & B^x_{M,N,M-1,N-1}\\ B^y_{0,0,0,0} & B^y_{1,0,0,0} & \cdots & B^y_{M,N,0,0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B^y_{0,0,M-1,N-1} & B^y_{1,0,M-1,N-1} & \cdots & B^y_{M,N,M-1,N-1}\end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_{0,0},a_{1,0},\ldots,a_{M,N}]\quad, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}=[&g^x_{0,0},g^x_{1,0},\ldots,g^x_{M-1,N-1},\\&g^y_{0,0},g^y_{1,0},\ldots,g^y_{M-1,N-1}]^{\mathrm{T}}\quad。\end{aligned} \tag{15}$$

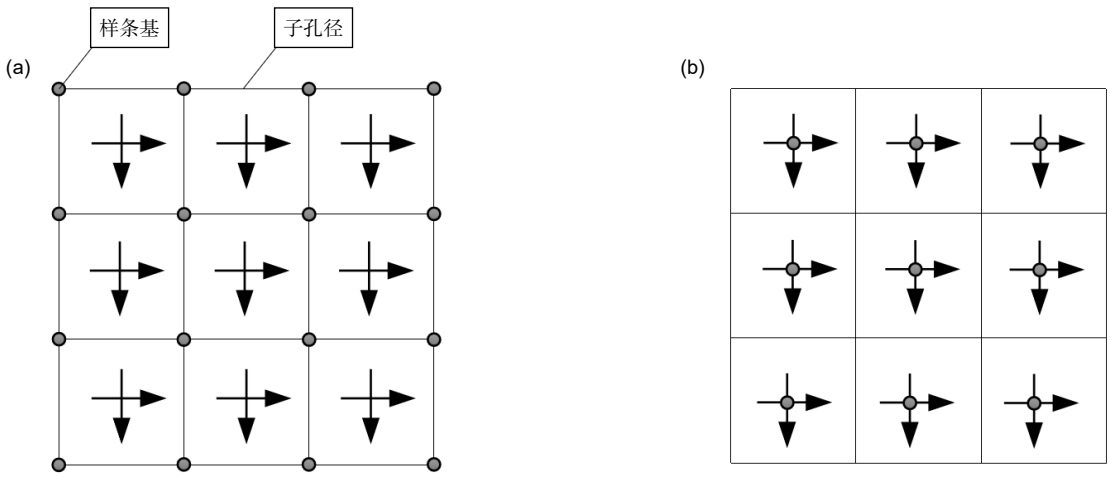


图 2 方形排布的 B 样条基位置与子孔径之间的关系。(a) Fried; (b) Southwell

Fig. 2 Positional relation between B-spline basis and subaperture with a square layout. (a) Fried model; (b) Southwell model

由于 $B(x,y)$ 的紧支撑特性，$\boldsymbol{R}$ 为一稀疏矩阵，因此式(12)为稀疏方程。

易知，若 $B(x,y)$ 使用 1 次 B 样条函数，式(12)与传统的 Fried 区域法一致，而 Southwell 布局也有类似的关系，因此传统的区域法可以视为 B 样条函数复原算法在 1 阶条件下的特例。为了描述简洁，本文后面的讨论和仿真均采用 Fried 模型，而 Southwell 模型推导方式与之类似。

3 基于泊松方程的快速 2 阶 B 样条函数波前复原算法

式(12)的直接解法为求解 $\boldsymbol{R}$ 的广义逆矩阵，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{R}^{+}\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g} \quad 。 \tag{16}$$

尽管 $\boldsymbol{R}$ 为一个稀疏矩阵，但 $\boldsymbol{R}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{R}^{+}$ 并不是稀疏矩阵，在复原的时候即使提前计算好 $\boldsymbol{R}^{+}$，也需要 $(M+1)^2\times(N+1)^2$ 个数的存储空间，并且一次重构需要 $(M+1)^2\times(N+1)^2$ 次乘法。当子孔径数目比较多的时候，使用 FPGA 或 DSP 等计算时，会带来巨大的空间开销，可以预估，当子孔径数提升 1 倍时，存储空间和计算量会提升 16 倍，这种情况下，这种计算方法将制约 B 样条波前复原算法的应用。

由式(10)知，波前重构是求解如下最优化问题：

$$\begin{aligned}&\arg\min<\nabla\phi(x,y)-g,\nabla\phi(x,y)-g>\\&=\arg\min_{\{a_{i,j}\}}\left|\sum a_{i,j}\nabla B_{i,j}-g\right|_2^2 \quad ,\end{aligned} \tag{17}$$

该问题等效于求解泊松方程，

$$\Delta\phi(x,y)=\nabla\cdot g \quad , \tag{18}$$

代入式(10)，可得：

$$\sum_{i,j}a_{i,j}\cdot\Delta B_{i,j}(x,y)=\nabla\cdot g \quad 。 \tag{19}$$

式(19)左边等价于计算图 3 中编号为 5 的 B 样条基处的散度(其中圆圈代表 B 样条基位置，实线方形表示子孔径区域，虚线方形表示 B 样条基的积分区域)，支撑域包含编号 5 区域的 B 样条基为 1~9 号，对 $\Delta B_i(x,y)(i=1,2,\ldots,9)$ 的解析表达式在编号 5 区域中积分，式(19)可改写为

$$\frac{1}{3}\sum_{i\neq5}a_i-\frac{8}{3}a_5=\nabla\cdot g \quad 。 \tag{20}$$

改变成式(20)后，即可使用逐次超松驰迭代法(successive over relaxation method, SOR)进行求解[19]：

$$a_5=\frac{1}{8}\sum_{i\neq5}a_i-\frac{3}{8}\nabla\cdot g \quad 。 \tag{21}$$

接下来计算 $\nabla\cdot g$。为方便描述，以图 4 所示为 1,2,3,4 表示 4 个子孔径，令 g_i^x,g_i^y $(i=1,2,3,4)$ 为子孔径 x 和 y 方向的斜率，为计算黑色圆点处的散度 $\nabla\cdot g$，在黑色圆点处对斜率进行 1 阶 Taylor 展开，可得：

$$\begin{cases}g_1^x=g^x-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial g^x}{\partial x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial g^x}{\partial y}=g^x-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\\ g_1^y=g^y-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial g^y}{\partial y}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial g^y}{\partial x}=g^y-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\end{cases} , \tag{22}$$

类似计算可得其余的 g_i^x,g_i^y。

进一步可得出：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot g&=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\\&=g_2^x+g_4^x-g_1^x-g_3^x+g_3^y+g_4^y-g_1^y-g_2^y \quad 。\end{aligned} \tag{23}$$

这样就可以通过子孔径的斜率估计出 B 样条基处

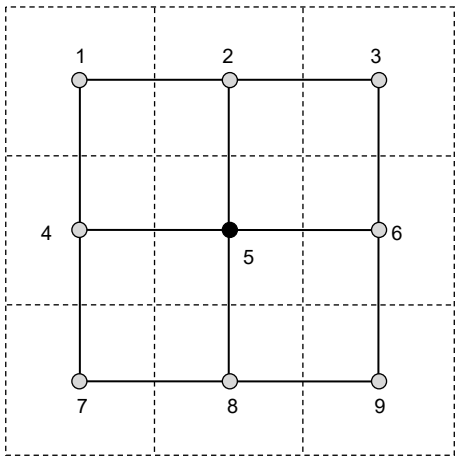


图 3 B 样条散度积分示意图

Fig. 3 B-spline divergence integral diagram

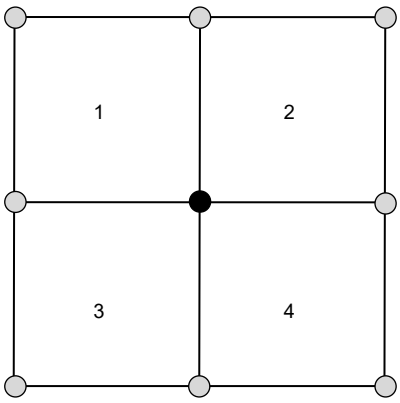


图 4 散度近似计算示意图

Fig. 4 Diagram of divergence approximation

(黑色圆点)的散度。至此，式(19)中的必要元素已具备。通过求解式(19)，则可得到所有 B 样条基的系数，最后通过式(9)则可得到复原波前的解析式。

对于边界位置 B 样条基，由于积分区域改变，式(20)会有所改变，以图 3 中的 1 号 B 样条基为例：

$$a_1=\frac{1}{4}(a_2+a_4+2a_5)-\frac{3}{2}\nabla\cdot g_1 \quad 。 \tag{24}$$

而边界位置处的散度估计，可以通过对斜率的外拓来简化计算，可采用重复延拓或补 0 延拓。

可见，基于泊松方程的 2 阶 B 样条快速重建算法，存储空间为 $(M+1)\times(N+1)$，乘法需求量为 $(M+1)\times(N+1)\times L$，其中 L 为迭代步数。一般而言，SOC 算法在迭代几十次左右后将收敛。因此相比广义逆求解，存储空间和计算量的需求减少了很多，特别当子孔径数目增大时，优势更明显。

4 实 验

本文利用自主研制的 121 单元六边形排布的压电陶瓷变形镜，测量其中心位置处 7 个驱动器(命名为 1~7 号，正中心位置为 4 号)的响应函数，分别通过干涉仪和哈特曼波前传感器采集数据，再通过不同的复原算法从哈特曼的数据中复原波前，并与干涉仪的数据进行对比。

为减少变形镜初始面型以及光学系统对测试结果的影响，每个驱动器分别加 ± 80 V 后，对测量得到的波前进行对减。基准数据采用干涉仪(Zygo GPI-600)测量的结果，4 号驱动器的响应函数如图 5 所示。

使用哈特曼测量时，将变形镜的光瞳口径缩束后与哈特曼波前传感器成 3：4 匹配(即哈特曼波前传感器的有效探测区域为变形镜的 75%)，哈特曼波前传感器的微透镜阵列为方形排布，阵列数为 22×22，子孔径大小为 0.25 μm，焦距为 9.52 mm(使用 Yang 等提出方法标定[20])，测量波长为 808 nm。

通过区域法、模式法和本文提出的复原算法(迭代次数取 20 次)复原的波前和残差波前如图 6 所示，为实现相同数字采样率，区域法的结果采用双线性插值方法进行处理。为实现对减，首先通过相关找到原始两个波面的位置偏移，区域法通过双线性插值重新生成与干涉仪位置一样的波前；模式法和本文提出的算法通过偏移后的坐标计算波前，考虑到模式法的边缘效应，仅计算单位圆域内的波前数据，而本文提出的算法仅计算样条内部的区域。4 号驱动器的复原波前和残差如图 6 所示，相关系数、残差如表 1 所示，所有驱动器的波前残差 PV 值与 RMS 值如图 7 所示，对应的数值结果如表 2 所示。

从与干涉仪对比的结果可知，由于 Zernike 模式法的局限性，其对局部像差的复原能力较差，因此对这种驱动器产生的响应函数无法精确复原，复原残差很大。区域法和本文提出的方法均可以较好地复原这种局部像差。从复原的数值上看，本文的方法优于区域法，其原因在于：区域法采用双线性插值时会带来插值误差；区域法的抗噪能力有限，因此残差波前的 PV 值显著大于本文提出的方法。另外，观察图 6 中驱动器顶端复原的波前细节，可以看出，区域法在这个位置由于受采样误差和噪声的影响，未能复原出平滑的“峰”。

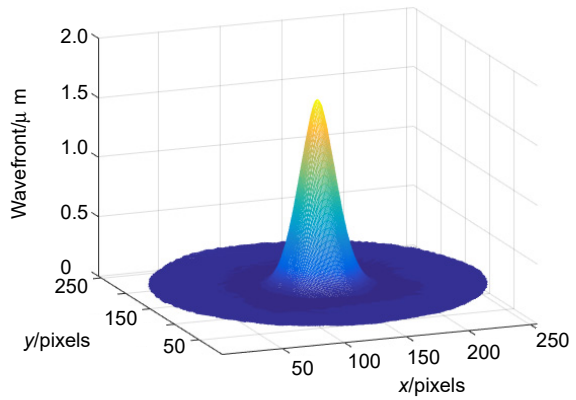


图 5 4 号驱动器的干涉仪测量数据

Fig. 5 Measurement data of No.4 actuator obtained with ZYGO interferometer

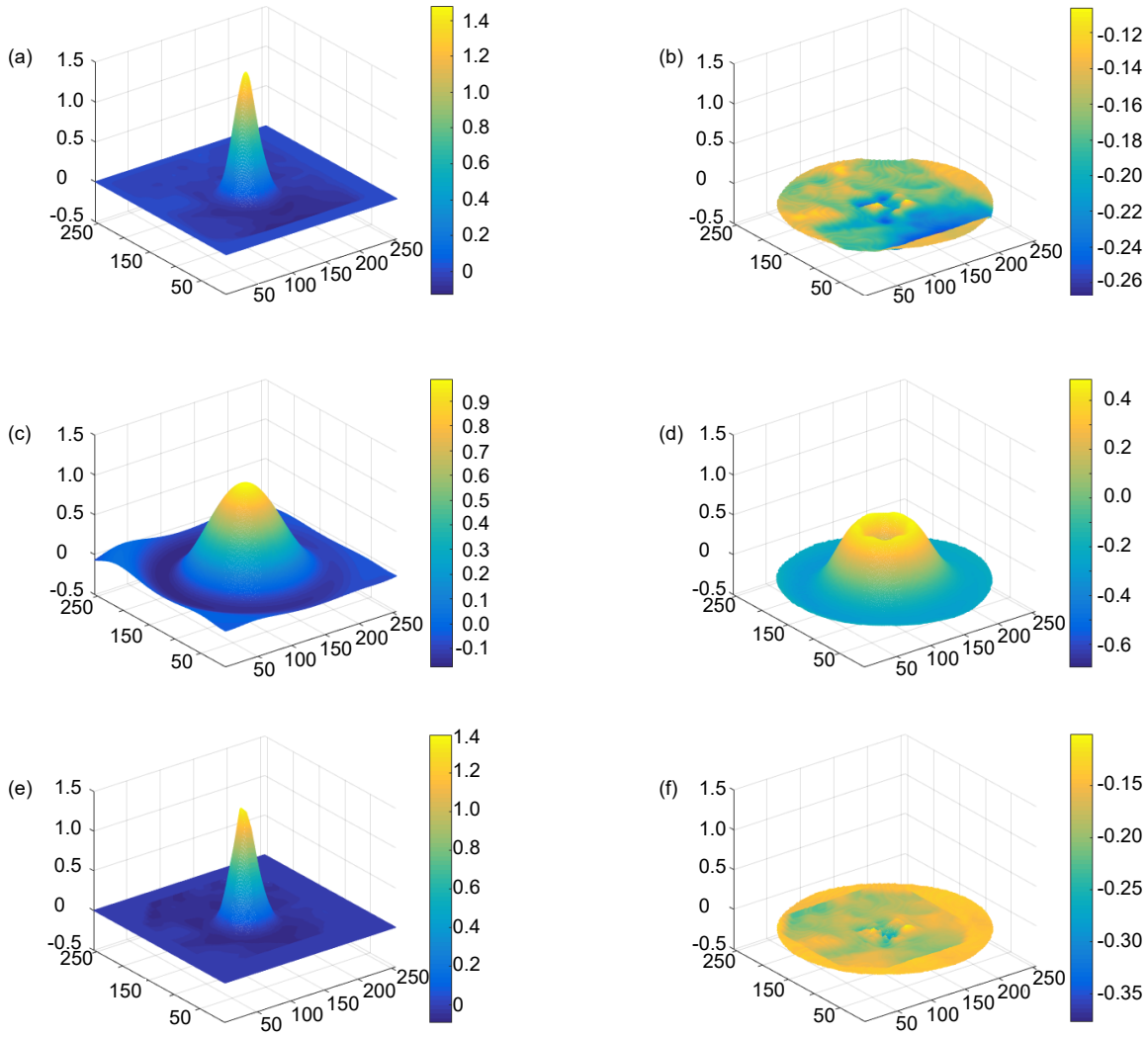


图 6　不同复原方法复原结果。(a) 本文算法重建波前；(b) 本文算法的残余波前；(c) 基于 Zernike 多项式的模式法重建波前；(d) 模式法的残余波前；(e) Fried 区域法重建波前；(f) 区域法的残余波前

Fig. 6　Wavefronts restored by different methods. (a) Wavefront restored by our method; (b) Residual wavefront error of (a); (c) Wavefront restored by the modal method; (d) Residual wavefront error of (c); (e) Wavefront restored by the zonal method; (f) Residual wavefront error of (e)

表 1　不同复原方法结果比较(4#驱动器)

Table 1　Comparison results of different wavefront reconstruction methods

数据类型	波前		残差		相关值/%
	PV/μm	RMS/μm	PV/μm	RMS/μm	
原始	1.579	0.159	-	-	-
区域法	1.493	0.184	0.277	**0.026**	94.8
Zernike 模式法(35 项)	1.163	0.259	1.185	0.232	85.1
本文方法	**1.612**	**0.167**	**0.162**	0.028	**97.2**

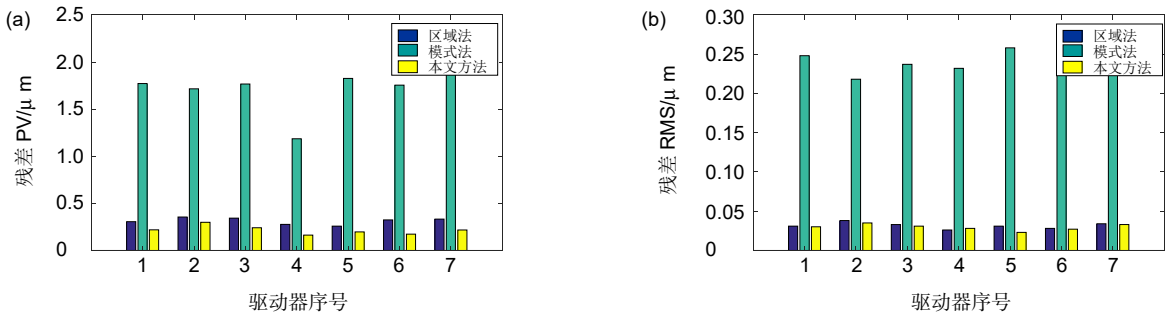


图 7 不同驱动器复原残差

Fig. 7 PV and RMS results of residual wavefront reconstructed by different methods

表 2 不同驱动器复原残差及相关值

Table 2 Residual reconstruction error and correlation values of different actuators

驱动器序号	区域法			Zernike 模式法(35 项)			本文方法		
	PV/μm	RMS/μm	相关值/%	PV/μm	RMS/μm	相关值/%	PV/μm	RMS/μm	相关值/%
1	0.305	0.031	99.4	1.772	0.248	84.3	0.219	0.030	99.8
2	0.355	0.038	99.1	1.715	0.218	82.5	0.299	0.035	99.7
3	0.343	0.033	99.7	1.767	0.237	81.2	0.241	0.031	99.6
4	0.277	0.026	94.8	1.185	0.232	85.1	0.162	0.028	97.2
5	0.258	0.031	98.7	1.825	0.258	85.6	0.196	0.023	99.8
6	0.323	0.028	99.6	1.754	0.243	78.3	0.172	0.027	99.7
7	0.332	0.034	99.5	2.004	0.261	82.9	0.217	0.033	99.6

5 结 论

本文提出了一种基于 2 阶 B 样条快速波前复原算法，采用泊松方程改写斜率最小二乘方程，使其可以通过超松驰迭代法进行快速求解，大大降低了复原算法的存储空间需求和计算复杂度，容易在 DSP 或 FPGA 等硬件中实现，在子孔径数目增多时其优势更加明显，并且可以采用分块的超松驰迭代法等方法[21]提高算法的并行计算能力。该方法可以推广到其它斜率型波前传感器，如金字塔波前传感器[22]，四波剪切干涉仪[23]等。

通过对变形镜驱动器响应波前的测量实验可以看出，模式法存在明显的局限性，无法精确复原局部像差，而本文提出的算法具有与区域法相当的局部像差复原能力，同时有优于后者的抗噪能力。由于复原的波前具有解析解，无需插值即可得到非常高的数值采样精度的波前信息，这使得复原波前更加平滑。

通过泊松方程改写的式(19)，左侧为对样条函数的散度积分，右侧为利用斜率对散度的估计。因此，左侧可以扩展到不同阶次和不同扩展度的 B 样条基，实现数值采样精度的灵活选取。而右侧根据式(23)中的处理方法，可以灵活选取计算散度的区域。一般来说，计算散度利用的斜率点越多，抗噪能力越强，对局部像差的复原能力越弱。因此，通过灵活选取计算散度的区域，可以有效平衡对局部区域像差的复原能力和抗噪能力需求。

参考文献

[1] Furukawa Y, Takaie Y, Maeda Y, *et al*. Development of one-shot aspheric measurement system with a Shack-Hartmann sensor[J]. *Appl Opt*, 2016, **55**(29): 8138–8144.

[2] Wu Y, He J C, Zhou X T, *et al*. A limitation of Hartmann-Shack system in measuring wavefront aberrations for patients received laser refractive surgery[J]. *PLoS One*, 2015, **10**(2): e0117256.

[3] Yang Z P, Li E D, Zhang X J, *et al*. Adaptive optics correction systems on Shen Guang Ⅲ facility[J]. *Opto-Electron Eng*, 2018, **45**(3): 180049.
杨泽平, 李恩德, 张小军, 等. “神光-Ⅲ”主机装置的自适应光学波前校正系统[J]. 光电工程, 2018, **45**(3): 180049.

[4] Zhou R, Wei L, Li X Y, *et al*. Shack-Hartmann optimum threshold estimation for the point source[J]. *Acta Phys Sin*, 2017, **66**(9): 090701.
周睿, 魏凌, 李新阳, 等. 点光源哈特曼最优阈值估计方法研究[J]. 物理学报, 2017, **66**(9): 090701.

[5] Wei L, Shi G H, Lu J, *et al*. Centroid offset estimation in the

Fourier domain for a highly sensitive Shack–Hartmann wavefront sensor[J]. *J Opt*, 2013, **15**(5): 055702.

[6] Fried D L. Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements[J]. *J Opt Soc Am*, 1977, **67**(3): 370–375.

[7] Southwell W H. Wave-front estimation from wave-front slope measurements[J]. *J Opt Soc Am*, 1980, **70**(8): 998–1006.

[8] Dai F Z, Tang F, Wang X Z, *et al*. Modal wavefront reconstruction based on Zernike polynomials for lateral shearing interferometry: comparisons of existing algorithms[J]. *Appl Opt*, 2012, **51**(21): 5028–5037.

[9] Lee H. Use of Zernike polynomials for efficient estimation of orthonormal aberration coefficients over variable noncircular pupils[J]. *Opt Lett*, 2010, **35**(13): 2173–2175.

[10] Nam J, Thibos L N, Iskander D R. Zernike radial slope polynomials for wavefront reconstruction and refraction[J]. *J Opt Soc Am A*, 2009, **26**(4): 1035–1048.

[11] Tang G M, He Y M, Liao Z. Radial Hartmann method for measuring large optical system[J]. *Chin J Lasers*, 2010, **37**(3): 795–799.
汤国茂, 何玉梅, 廖周. 大型光学系统径向哈特曼像质检测方法[J]. 中国激光, 2010, **37**(3): 795–799.

[12] Darudi A, Bakhshi H, Asgari R. Image restoration using aberration taken by a Hartmann wavefront sensor on extended object, towards real-time deconvolution[J]. *Proc SPIE*, 2015, **9530**: 95300Q.

[13] Seifert L, Tiziani H J, Osten W. Wavefront reconstruction with the adaptive Shack–Hartmann sensor[J]. *Opt Commun*, 2005, **245**(1–6): 255–269.

[14] Ares M, Royo S. Comparison of cubic B-spline and Zernike-fitting techniques in complex wavefront reconstruction[J]. *Appl Opt*, 2006, **45**(27): 6954–6964.

[15] de Visser C C, Verhaegen M. Wavefront reconstruction in adaptive optics systems using nonlinear multivariate splines[J]. *J Opt Soc Am A*, 2013, **30**(1): 82–95.

[16] Huang L, Xue J P, Gao B, *et al*. Spline based least squares integration for two-dimensional shape or wavefront reconstruction[J]. *Opt Lasers Eng*, 2017, **91**: 221–226.

[17] Pant K K, Burada D R, Bichra M, *et al*. Weighted spline based integration for reconstruction of freeform wavefront[J]. *Appl Opt*, 2018, **57**(5): 1100–1109.

[18] Knott G D. *Interpolating Cubic Splines*[M]. Boston: Birkhäuser, 2000.

[19] 叶其孝, 沈永欢. 实用数学手册[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006.

[20] Yang J S, Wei L, Chen H L, *et al*. Absolute calibration of Hartmann-Shack wavefront sensor by spherical wavefronts[J]. *Opt Commun*, 2010, **283**(6): 910–916.

[21] Xie D X. A new block parallel SOR method and its analysis[J]. *SIAM J Sci Comput*, 2006, **27**(5): 1513–1533.

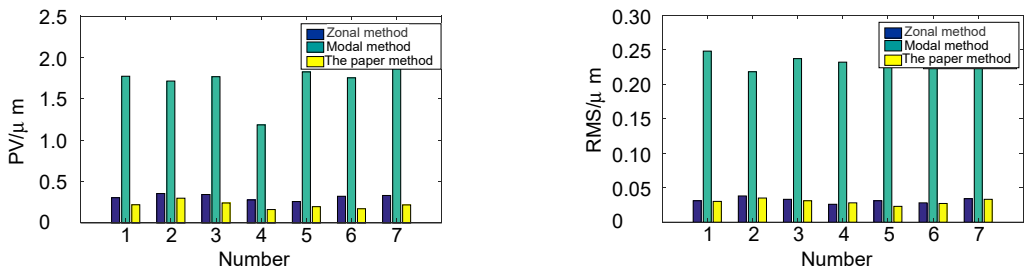
[22] Chamot S R, Dainty C, Esposito S. Adaptive optics for ophthalmic applications using a pyramid wavefront sensor[J]. *Opt Express*, 2006, **14**(2): 518–526.

[23] Chanteloup J C F, Cohen M. Compact high resolution four wave lateral shearing interferometer[J]. *Proc SPIE*, 2004, **5252**: 282–292.

A B-spline based fast wavefront reconstruction algorithm

Chen Hao[1,2*], Wei Ling[1,2], Li Ende[1,2], He Yi[3,4], Yang Jinsheng[1],
Li Xiqi[1,2], Fan Xinlong[1], Yang Zeping[1], Zhang Yudong[1,2]

[1]Key Laboratory of Adaptive Optics, Institute of Optics and Electronics,
Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;
[2]College of Materials Science and Opto-Electronic Technology,
University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
[3]Jiangsu Key Laboratory of Medical Optics, Suzhou, Jiangsu 215163, China;
[4]Suzhou Institute of Biomedical Engineering and Technology, Chinese Academy of Sciences, Suzhou, Jiangsu 215163, China



PV and RMS results of residual wavefront reconstructed by different methods

Overview: Reconstructing wavefront from sampled slopes is the key to the slope sampling wavefront sensors, such as the Shack-Hartmann wavefront sensors and the pyramid wavefront sensors. Traditional reconstruction schemes can be classified into zonal and modal methods. The zonal methods reconstruct the wavefront by solving the slope differential-based least squares problem, in which the slopes are related to the wavefront data sampled in a predefined grid. These methods are good at reconstructing the local details of the wavefront, but are sensitive to the noise in the slope data. Besides, as it can only calculate the wavefront data in the grid, interpolation methods are needed to retrieve the wavefront data of higher spatial resolution, which may introduce additional error. The modal methods expand the wavefront to the linear combination of orthogonal polynomials, such as Zernike polynomials for the radical pupil and Legendre polynomials for the rectangle pupil. These methods are much more robust to the noise, but they have limited ability in recovering the local details of the wavefront. Hence, more polynomials are needed to recover the local details, but it will make the reconstruction process more ill-posed at the same time.

In this paper, a B-spline based fast wavefront reconstruction algorithm is proposed. The wavefront is expanded to the linear combination of bi-variable B-spline curved surfaces first. Then the reconstruction problem is converted from the least-mean squares of slopes to a Poisson problem, in which only the theoretical divergence and the measured divergence are utilized. The theoretical divergence can be calculated efficiently by the integration of divergences of the related B-spline bases, and the measured divergence can be easily estimated by the Taylor expanding of the local slopes. Then, the Poisson problem can be efficiently solved by employing successive over relaxation (SOR) method.

To evaluate the performance of the proposed method, an experiment of measuring the influence functions of the actuators of a piezoelectric deformed mirror is performed. Experimental results show that the proposed algorithm can recover the local details of the wavefront as good as the zonal methods, while is much more robust to the slope noise. Besides, thanks to the analytic solution of wavefront, it can retrieve the high spatial resolution data directly. As the proposed method separates the theory divergence calculation of the B-spline bases from the slopes, it can be easily extended to other reconstruction problems with different orders and control knots of B-spline surfaces utilized. Last but not least, the ability of recovering the local details and robustness to slope noise can be easily balanced by changing the layout of the knot and the calculation area of divergence estimation.

Chen H, Wei L, Li E D, *et al.* A B-spline based fast wavefront reconstruction algorithm[J]. *Opto-Electron Eng*, 2021, **48**(2): 200160; DOI: 10.12086/oee.2021.200160

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61605210, 61675226, 61378090), the National Instrumentation Program (2012YQ120080), and the National Key Research and Development Program of China (2016YFC0102500, 2017YFB0403700)

* E-mail: chenhao114@mails.ucas.ac.cn